Physik

Elektrizitätslehre

Kondensatoren

Einige große Aufgaben

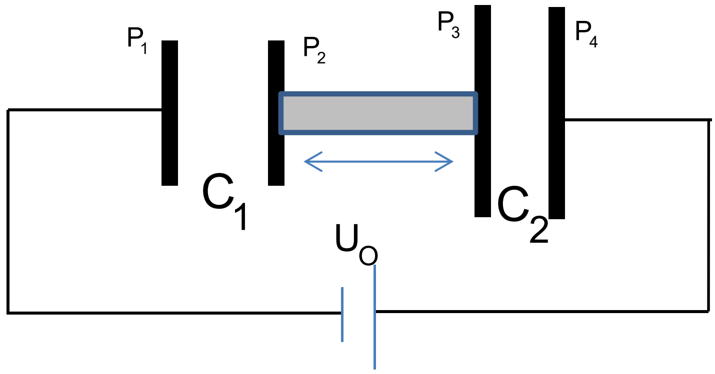
Datei Nummer 94120

Stand: 12. Oktober 2024

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

Aufgabe 1



Zwei Plattenkondensatoren mit quadratischen Platten sind in Reihe geschaltet.
Der Kondensator C_1 hat die Seitenlänge 25 cm, die Flächen von C_2 sind doppelt so groß.
Die Platten 1 und 4 sind fest verankert, die Platten 2 und 3 sind starr verbunden aber zwischen den Platten P_1 und P_4 gemeinsam horizontal verschiebbar. Die Summe der Plattenabstände von C_1 und C_2 beträgt $d_o = 4{,}0$ cm.
Das Dielektrikum ist Luft.

a) Berechne ihre Kapazitäten sowie die Ersatzkapazität der Reihenschaltung, wenn der Plattenabstand ursprünglich je 2,0 cm beträgt.
Berechne die an den Kondensatoren liegenden Teilspannungen, wenn die angelegte Spannung $U_O = 20$ V beträgt.

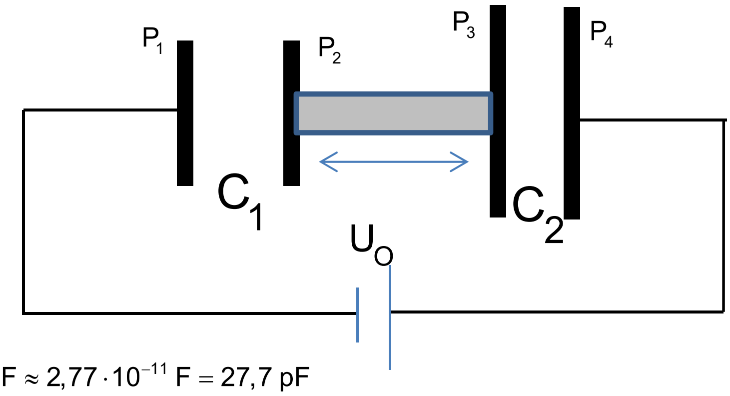
b) Nun werden die starrverbundenen Platten 2 und 4 verschoben. (Berührung mit P_1 oder P_4 ist möglich.
Berechne die Ersatzkapazität der Reihenschaltung in Abhängigkeit vom Plattenabstand x des Kondensators C_2
Trage den Kehrwert $\frac{1}{C}$ der Ersatzkapazität in einem Diagramm über x auf. Verwende den in Teilaufgabe a) berechneten Wert. (Einheiten: x = 1 cm $\hat{=}$ 2 cm im Diagramm und $10^{10}\,\text{F}^{-1} \hat{=} 1\,\text{cm}$.
Bestimme mit Hilfe des Diagramms die minimale und die maximale Ersatzkapazität.

c) Vergleiche den Energieinhalt der von der Spannungsquelle abgetrennten, hintereinander geschalteten Kondensatoren bei minimaler und maximaler Ersatzkapazität:

In welcher Richtung würden sich die Platten 2 und 3 aus der Stellung in a) bewegen, wenn sie zwischen den Platten 1 und 4 frei beweglich wären? (Begründung).

Gegeben: $\varepsilon_O = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$

Lösung 1



a) **Kondensator C_1:**

$A_1 = (0{,}25\ \text{m})^2 = 0{,}0625\ \text{m}_2$.
Mit $d_1 = 0{,}02$ m folgt:

$$C_1 = \varepsilon_O \cdot \frac{A_1}{d_1}$$

$$C_1 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{0{,}0625}{0{,}02} \text{F} \approx 2{,}77 \cdot 10^{-11}\ \text{F} = 27{,}7\ \text{pF}$$

Kondensator C_2 mit $A_2 = 2 \cdot A_1 = 0{,}125\ \text{m}^2$ und $d_2 = 0\ 2$ m:

$$C_2 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{0{,}125}{0{,}02} \text{F} \approx 5{,}53 \cdot 10^{-11}\ \text{F} = 55{,}3\ \text{pF}$$

Ersatzkapazität der Reihenschaltung:

$$\frac{1}{C_E} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_2 + C_1}{C_1 \cdot C_2} \quad \Rightarrow \quad C_E = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{27{,}7 \cdot 55{,}3}{27{,}7 + 55{,}3} \text{pF} \approx 18{,}5\ \text{pF}$$

Teilspannungen: Angelegte Spannung: $U_O = 20\ \text{V}$. Die Teilspannungen seien U_1und U_2.

Weil bei Hintereinanderschaltung auf beiden Kondensatoren die gleiche Ladung liegt, gilt:

$$Q = U_1 \cdot C_1 \ \text{ und } \ Q = U_o \cdot C_E \quad \Rightarrow \quad U_1 \cdot C_1 = U_O C_E \quad \Rightarrow \quad U_1 = \frac{C_E}{C_1} \cdot U_O = \frac{C_1 \cdot C_2}{(C_1 + C_2) \cdot C_1} \cdot U_O = \frac{C_2}{(C_1 + C_2)} \cdot U_O$$

Analog ist $\quad U_2 = \dfrac{C_1}{(C_1 + C_2)} \cdot U_O$

Nun haben wir hier $\boxed{C_2 = 2C_1}$ damit folgt:

$$U_{13{,}3\ \text{V}} = \frac{2C_1}{3C_1} \cdot U_O = \frac{2}{3} U_O = \tfrac{40}{3}\ \text{V} \approx 13{,}3\text{V} \qquad \text{und} \qquad U_2 = \frac{1}{3} \cdot U_O = \tfrac{20}{3}\ \text{V} \approx 6{,}7\ \text{V}.$$

- Man kann sich merken: Bei einer Reihenschaltung sind Kapazität und Teilspannung umgekehrt proportional. Wenn also C_2 doppelt so groß ist wie C_1, dann hat C_1 die doppelte Spannung wie C_2. Und zusammen sind es 3 „Spannungs-Teile“, also ist $U_1 = \frac{1}{3} U_O$ und $U_2 = \frac{2}{3} U_O$.

b) Berechne die Ersatzkapazität der Reihenschaltung in Abhängigkeit vom Plattenabstand x des Kondensators C_2.

Es sei $d_2 = x$. Daraus folgt: $\qquad C_2 = \varepsilon_O \cdot \dfrac{2A_1}{x}$

und wegen $d_1 = d_O - x = 0{,}04\ \text{m} - x \qquad C_1 = \varepsilon_O \cdot \dfrac{A_1}{0{,}04 - x} (\text{F})$

Ersatzkapazität:

$$\frac{1}{C} = \frac{0{,}04 - x}{\varepsilon_O \cdot A_1} + \frac{x}{\varepsilon_O \cdot 2A_1} = \frac{0{,}08 - 2x + x}{\varepsilon_O \cdot 2A_1} = \frac{0{,}08 - x}{\varepsilon_O \cdot 2A_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{\varepsilon_O \cdot 2A}{0{,}08 - x}}$$

Zum Diagramm: $\frac{1}{C} = \frac{0{,}08 - x}{9{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}125} \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{C} = \frac{0{,}08 - x}{1{,}11 \cdot 10^{-12}}}$ $\left(\frac{1}{F} \text{ und x in m.}\right)$

Oder so: $\frac{1}{C} \approx -9 \cdot 10^{11} \cdot \frac{x}{m} \cdot \frac{1}{F} + 7{,}22^{10} \frac{1}{F}$

Oder so: $\frac{1}{C} \approx -9 \cdot 10^{11} \cdot \frac{x}{100\text{cm}} \cdot \frac{1}{F} + 7{,}22^{10} \frac{1}{F} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{C} \approx -9 \cdot 10^{9} \cdot \frac{x}{\text{cm}} \cdot \frac{1}{F} + 7{,}22 \cdot 10^{10} \frac{1}{F}}$

Umrechnung auf die angegebenen Einheiten:

x-Achse: 1 Einheit (1 cm) wird als 2 cm dargestellt.

y-Achse: 1 cm entspricht 10^{10} F^{-1}.

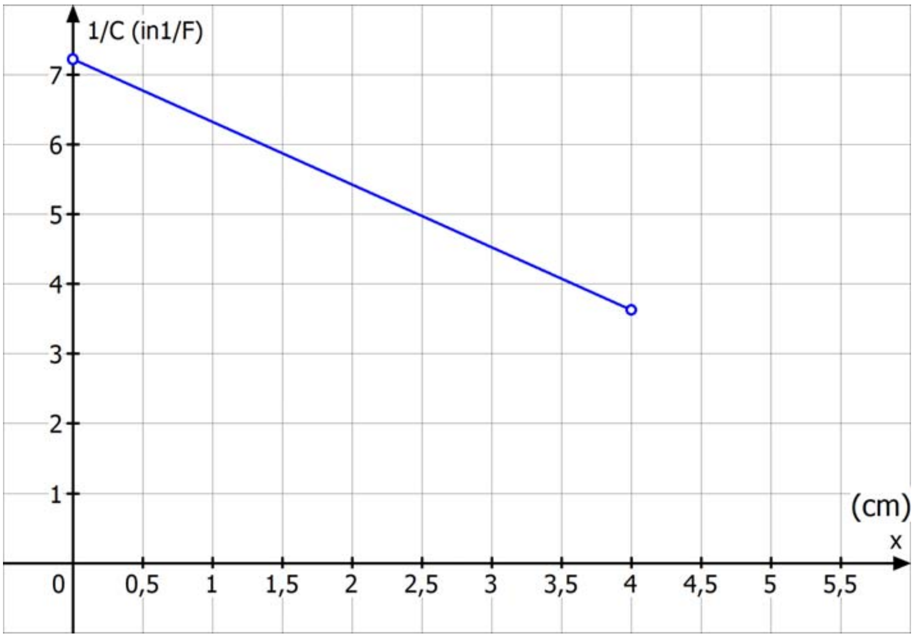
Das Schaubild ist eine Gerade, die man durch 2 Punkte so zeichnen kann:

Für x = 0 wird $C = \frac{\varepsilon_O \cdot 2A}{0{,}08} = 1{,}38 \cdot 10^{-11}\ F = 13{,}8\ pF$ die minimale Ersatzkapazität,

und der y-Achsen-Abschnitt: der Geraden wird $7{,}22 \cdot 10^{10} F^{-1} \to 7{,}22$ cm

Für x = 4 ist der Abstand maximal: $\frac{1}{C} \approx -9 \cdot 10^{9} \cdot \frac{4\ \text{cm}}{\text{cm}} \cdot \frac{1}{F} + 7{,}22 \cdot 10^{10} \frac{1}{F} = \boxed{3{,}62 \cdot 10^{10} \frac{1}{F}}$

Das bedeutet: $C \approx 2{,}76 \cdot 10^{-11} F = 27{,}6\ pF$, und das ist die maximale Kapazität.



Der Trick dieses Verfahrens besteht darin, dass man nicht C in Abhängigkeit von x abträgt, sondern 1/C. Dann erhält man eine lineare Funktion, deren Schaubild schnell durch zwei Punkte erstellt werden kann.

c) Vergleiche den Energieinhalt der von der Spannungsquelle abgetrennten, hintereinander geschalteten Kondensatoren bei minimaler und maximaler Ersatzkapazität:

Die Formel für die im Kondensator gespeicherte Energie ist $E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$.

Bei abgetrennter Spannungsquelle ist die Spannung konstant 20 Volt.

Die **minimale** Ersatzkapazität ist bei x = 0 erreicht. Dann berühren sich die Platten P3 und P4, das heißt: Der Kondensator 2 ist leitend, und es gibt dort kein elektrisches Feld: $E_2 = 0$.

Für C_1 gilt dann: $E_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_O \cdot A_1}{0{,}04\text{ m}} \cdot (20\text{ V})^2$

Die **maximale** Ersatzkapazität ist bei x = 4 erreicht. Dann berühren sich die Platten P1 und P2, das heißt: Der Kondensator 1 ist leitend. Und $E_1 = 0$.

Für C_2 gilt dann; $E_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_O \cdot 2A_1}{0{,}04\text{ m}} \cdot (20\text{ V})^2$

Also ist E_2 doppelt so groß als E_1.

In welcher Richtung würden sich die Platten 2 und 3 aus der Stellung in a) bewegen, wenn sie zwischen den Platten 1 und 4 frei beweglich wären? (Begründung).

Die Platten bewegen sich zum minimalen Inhalt hin, so dass x Null wird, also nach rechts.

Aufgabe 2:

Ein Plattenkondensator besteht aus zwei vertikalen rechteckigen Platten der Breite b = 0,4 m und der Höhe h = 0,6 m. Der Plattenabstand beträgt d = 0,05 m.

a) An den Platten liegt eine Spannung von U = 500 V.
Berechne die Ladung des Kondensators.

b) Der Kondensator wird nun bis zur Höhe y mit Benzin ($\varepsilon_r = 2{,}4$) gefüllt.
Gib die Kapazität als Funktion der Füllhöhe y an.

c) Eine solche Anordnung kann zur Messung der Füllhöhe eines Benzintanks dienen.
Dazu wird an den Kondensator eine Wechselspannung $U_{eff} = 250\ \text{V}$ mit der Frequenz $f = 400\ \text{Hz}$ gelegt.

Zeichne ein Schaubild, das den Zusammenhang der Füllhöhe y und der Stromstärke I_{eff} zeigt.
(10^{-5} A ≙ 1 cm; Füllhöhe $0{,}1\,\text{m} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{cm}$).

Entnimm dem Schaubild die Füllhöhe für $I_{eff} = 4 \cdot 10^{-5}\,\text{A}$.

d) Wie kann man die durch das Dielektrikum bewirkte Erhöhung der Kapazität eines Kondensators erklären?

Lösung 2:

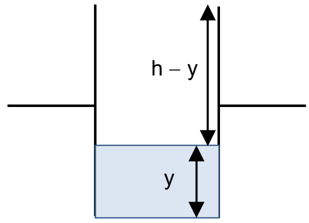
Gegeben sind: $b = 0{,}4\,\text{m},\ \ h = 0{,}6\text{ m},\ \ d = 0{,}05\text{ m}$

a) Kondensatorfläche: $A = b \cdot h = 24 \cdot 10^{-2}\text{ m}^2 = 0{,}24\text{ m}^2$

Kapazität: $C = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_O \cdot \dfrac{A}{d} = 1 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-8} \cdot \dfrac{0{,}24}{0{,}05}\text{F} \approx 42{,}5 \cdot 10^{-12}\text{F} = 42{,}5\text{ pF}$

Angelegte Spannung: $U = 500\text{ V}$

Kondensator-Ladung: $Q = C \cdot U = 42{,}5 \cdot 10^{-12}\text{F} \cdot 500\text{ V} \approx 2{,}15 \cdot 10^{-8}\text{ Cb}$



b) Der befüllte Kondensator ist nun vergleichbar mit zwei parallel geschalteten Kondensatoren:

Mit Luft: $A_L = b \cdot (h - y) \quad \Rightarrow \quad C_L = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_O \cdot \dfrac{A_L}{d} = 1 \cdot \varepsilon_O \cdot \dfrac{b \cdot (h-y)}{d}$

Mit Benzin: $A_B = b \cdot y \quad \Rightarrow \quad C_B = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_O \cdot \dfrac{A_L}{d} = 2{,}4 \cdot \varepsilon_O \dfrac{b \cdot y}{d}$

Gesamte Kapazität: $C_{ges} = C_L + C_B = \varepsilon_O \cdot \dfrac{b \cdot (h-y)}{d} + 2{,}4 \cdot \varepsilon_O \dfrac{b \cdot y}{d}$

$$C_{ges} = \frac{\varepsilon_O \cdot b}{d} \cdot (h - y + 2{,}4 \cdot y) = \frac{\varepsilon_O \cdot b}{d} \cdot (h + 1{,}4 \cdot y)$$

Mit Zahlen: $C_{ges} = \dfrac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}4}{0{,}05} \cdot (0{,}6 + 1{,}4 \cdot y)$

$$C_{ges} = 42{,}5 \cdot 10^{-12}\text{F} + 99{,}1 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot y$$

c) Angelegte Wechselspannung: $U_{eff} = 250\text{ V}$, Frequenz f = 400 Hz.

Kapazitiver Widerstand: $R_C = \dfrac{1}{\omega C}$ mit $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 400\text{ Hz} = 800\pi\text{ Hz}$

Effektive Stromstärke: $I_{eff} = \dfrac{U_{eff}}{R_C} = U_{eff} \cdot \omega \cdot \mathbf{C}$

Mit Zahlen: $I_{eff} = 250 \cdot 800\pi \cdot s^{-1} \cdot \left(42{,}5 \cdot 10^{-12}\text{F} + 99{,}1 \cdot 10^{-12}\,\dfrac{\text{F}}{\text{m}} \cdot y\right)$

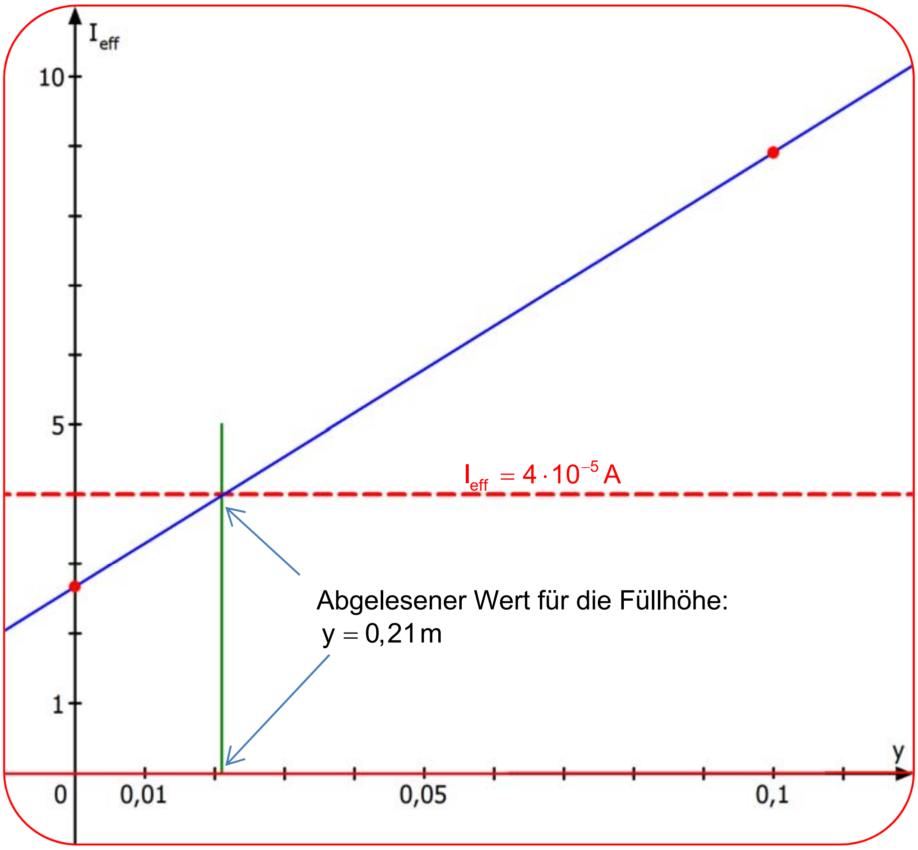
$$I_{eff} = 2{,}67 \cdot 10^{-5}\text{A} + 6{,}24 \cdot 10^{-5} \cdot \text{A} \cdot \frac{y}{m}$$

Dies ist eine lineare Funktion.

y-Achse: 1 cm ergibt 10^{-5} A , x-Achse; 1 cm ergibt 0,1 m

Man zeichnet das Schaubild z. B. durch Eintrag zweier Messpunkte:

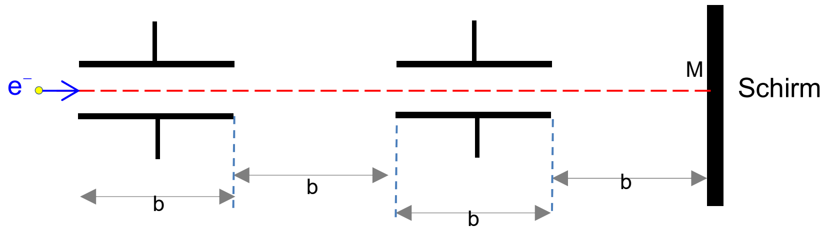
Zu y = 0 m gehört $I_{eff} = 2{,}67$ (E) und zu y = 1 m $(\triangleq 10\text{ cm})$ gehört I_{eff} = 8,91 (E)



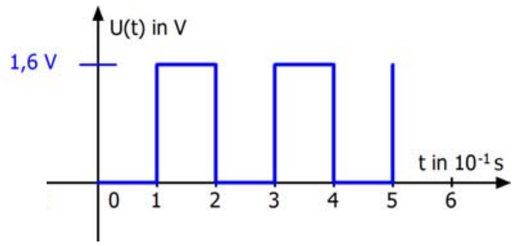
d) Das elektrische Feld bewirkt eine Polarisation des Dielektrikums, die das Feld schwächt. Dadurch sinkt die Spannung. Als Folge kann man stärker aufladen, d. h. die Kapazität wird erhöht.

Aufgabe 3:

Zwei Plattenkondensatoren mit dem Plattenabstand d = 3,5 cm werden in b = 10 cm Abstand hintereinander aufgestellt und parallel geschaltet.



An die Platten wird eine Rechteckspannung gelegt, deren Verlauf rechts dargestellt ist.



a) Zur Zeit t = 0 tritt ein Elektron symmetrisch zu den Platten in den ersten Kondensator ein.
Bei welchen Geschwindigkeiten trifft das Elektron auf die positiv geladene Platte des ersten Kondensators auf?

b) In welcher Entfernung von der Mitte M trifft ein Elektron der Eintrittsgeschwindigkeit $v = 10^6\,\frac{m}{s}$ auf den 10 cm hinter dem zweiten Kondensator stehenden Schirm?

c) Bei welcher Geschwindigkeit durchläuft das Elektron beide Kondensatoren ohne Ablenkung?

d) Erzeugt man durch Glühemission Elektronen und lässt sie verschiedene Beschleunigungsspannungen U_B durchlaufen, so erhalten sie verschiedene Geschwindigkeiten.
Wie kann man nach den Ergebnissen von Teilaufgabe c) mit der Anordnung der beiden Kondensatoren die spezifische Elektronenladung $\frac{e}{m}$ bestimmen?

$$\frac{e}{m} = 1{,}76 \cdot 10^{11}\,\frac{Cb}{kg}$$

Lösung 3:

a) Das Elektron tritt mit einer Geschwindigkeit v_O senkrecht in das Kondensatorfeld ein. Da in der Zeit t = 0 bis $t_1 = 10^{-7}$ s keine Spannung angelegt ist, wirkt keine Kraft auf das Teilchen, sodass es gleichförmig gradlinig durch den Kondensator fliegt.

In dieser Zeitspanne legt es im 1. Kondensator die Strecke $s_1 = v_O \cdot 10^{-7}\,s$ zurück.

Bei sehr hoher Geschwindigkeit durchfliegt es dabei den ersten Kondensator ohne seitlich in Richtung der positiven Platte abgelenkt zu werden. in der Zeit zwischen $t_1 = 10^{-7}\,s$ bis $t_2 = 2 \cdot 10^{-7}\,s$ wird das Elektron durch das elektrische Feld, das durch die Spannung 1,6 V erzeugt wird, zur Plusplatte hin abgelenkt. Damit es zum Zeitpunkt t_2 gerade noch diese Platte trifft, muss es zum Zeitpunkt t_1 genau in der Mitte des Kondensators sein

Also muss gelten: $s_1 = v_O \cdot 10^{-7}\,s = 5\text{ cm} \quad \Rightarrow \quad v_O = \frac{5 \cdot 10^{-2}\,m}{10^{-7}\,s} = 5 \cdot 10^5\,\frac{m}{s} = 500\,\frac{km}{s}$

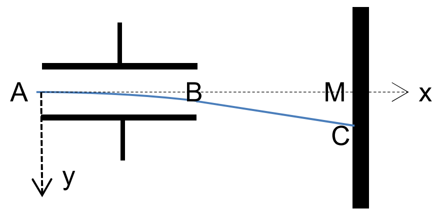
Ergebnis: Bei eine kleineren Geschwindigkeit als 500 $\frac{km}{s}$ trifft das Elektron auf die positive erste Platte.

b) Nun fliegt das Elektron mit $v_O = 2 \cdot 10^6\,\frac{m}{s}$ in den ersten Kondensator. Für die Zeitspanne $\Delta t = 10^{-7}\,s$ ist die Kondensatorspannung 0. Wie weit kommt es in dieser Zeit?

$\Delta s = v_O \cdot \Delta t = 2 \cdot 10^6\,\frac{m}{s} \cdot 10^{-7}\,s = 0{,}2\text{ m} = 20\text{ cm}$. Es befindet sich also nach dieser Zeitspanne am „Eingang“ zu Kondensator 2. Ab diesem Moment wirkt das eingeschaltete elektrische Querfeld mit der Stärke $E = \frac{U}{d} = \frac{1{,}6\text{ V}}{0{,}32\text{ m}} = 50\,\frac{V}{m}$ und wirkt am Elektron mit der Ablenkungskraft $F = E \cdot e = 50\,\frac{V}{m} \cdot e$. Dies hat eine Beschleunigung in y-Richtung zur Folge:

$$a = \frac{F}{m_e} = 50\,\frac{V}{m} \cdot \boxed{\frac{e}{m_e}} = 50\,\frac{V}{m} \cdot 1{,}76 \cdot 10^{11}\,\frac{Cb}{kg} = 8{,}8 \cdot 10^{12}\,\frac{m}{s^2}$$

Nun überlagert sich die gleichförmige Bewegung in x-Richtung mit der gleichmäßig beschleunigten Bewegung in y-Richtung (wie beim waagrechten Wurf). Das Elektron bewegt sich also im zweiten Kondensator auf einer Parabelbahn.^



Im Punkt B verlässt sie das Kondensatorfeld.
Für die horizontale Komponente dieser Bahn braucht es

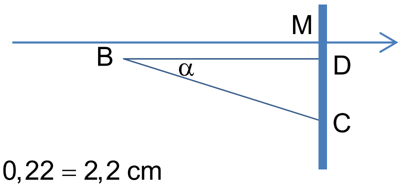
$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{0{,}1\,m}{2 \cdot 10^6\,\frac{m}{s}} = 5 \cdot 10^{-8}\,s$$

Die Ablenkung in g-Richtung beträgt in dieser Zeitspanne:

$$y = \tfrac{1}{2}at^2 = \tfrac{1}{2} \cdot 8{,}8 \cdot 10^{12}\,\frac{m}{s^2} \cdot 25 \cdot 10^{-16}\,s^2 \approx 0{,}011\,m = 1{,}1\,cm.$$

B liegt also am Kondensatorende 1,1 cm unterhalb der gradlinigen Flugbahn.

Die Neigung der Flugbahn ist $\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{a \cdot \Delta t}{v_x} = \frac{8{,}8 \cdot 10^{12} \cdot 5 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 10^6} = 0{,}22 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 12{,}4^O$



Gesucht ist die Strecke MC.

Wir kennen bereits MD= 1,1 cm, BD =10 cm und $\alpha = 12,4^{O}$.

Es fehlt noch DC: $\tan \tan \alpha = \frac{DC}{BD} \Rightarrow DC = BD \cdot \tan \alpha = 10\text{ cm} \cdot 0,22 = 2,2\text{ cm}$

Ergebnis: $MC = 1,1\text{ cm} + 2,2\text{ cm} = 3,3\text{ cm}.$

c) n der Zeit von t = 0 bis $t_1 = 10^{-7}$ s liegt keine Spannung an, wirkt also keine Ablenkunskraft. Wenn das Elektron in dieser Zeit den ersten Kondensator durchfliegt, wird es dort nicht abgelenkt. In der Zeit von $t_1 = 10^{-7}$ s bis $t_2 = 2 \cdot 10^{-7}\text{ s}$ liegt eine Spannung an den Kondensatoren. Aber in diesem Zeitintervall befindet sich das Elektron im Bereich zwischen den beiden Kondensatoren. Alsi wird es nicht abgelenkt. Dann fliegt es durch den 2. Kondensator, wird aber auch nicht abgelenkt, weil E = 0 ist.

Folgerung: Hat das Elektron die Geschwindigkeit $v = \frac{0,1\text{ m}}{10^{-7}\text{ s}} = 10^6 \frac{m}{s}$, dann wird es nicht abgelenkt. Das ist auch so, wenn das Elektron im Zeitintervall von t = 0 bis $t_1 = 10^{-7}$ s durch beide Kondensatoren fliegt, also mit <u>mindestens</u> $v = \frac{0,3\text{ m}}{10^{-7}\text{ s}} = 3 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$.

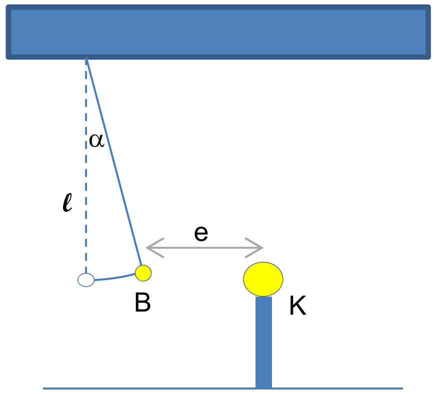
d) Regelt man die Ablenkspannung so, dass die Elektronen unabgelenkt durch beide Kondensatoren fliegt, also mit $v_O = 2 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$, dann gilt nach dem Satz über Energieerhaltung:

$$E_{Feld} = E_{kin}$$

$$e \cdot U = \tfrac{1}{2} m v^2$$

$$\frac{e}{m} = \frac{v^2}{2U}$$

Aufgabe 4

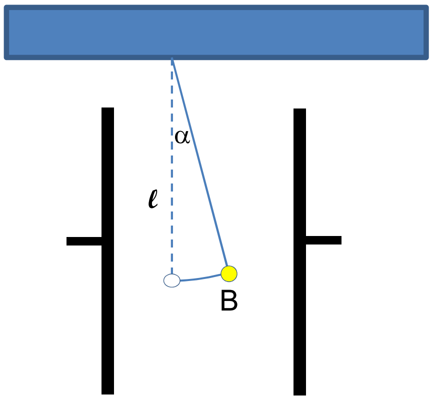


a) Eine mit Grafit beschichtete Kugel B der Masse $m = 0{,}10$ g hängt an einem $\ell = 2{,}00$ m langen Faden.

Sie trägt die positive Ladung $q = 2{,}0 \cdot 10^{-9}$ Cb.

Auf einem Isolierstab liegt die ungeladene Kondensatorkugel K mit dem Radius a = 2,0 cm. Bringt man K auf die Ladung Q, schlägt das Pendel um den Winkel $\alpha = 3{,}0^O$ aus und verharrt dort. Der Abstand der Kugelmittelpunkte ist nun e = 10 cm. Die Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte ist nun horizontal.

Berechne die Ladung Q und die Feldstärke E_1 des von Q erzeugten elektrischen Feldes an der Oberfläche der Kondensatorkugel K. Wie groß ist die Feldstärke E_2 dieses Feldes am Ort der Kugel ?



b) Die Pendelkugel befindet sich jetzt zwischen den Platten eines geladenen Kondensators. Dieser hat den Plattenabstand d = 20 cm und die Pattengröße $A = 0{,}50\ m^2$.

B trägt wie in a) die Ladung $q = 2{,}0 \cdot 10^{-9}$ Cb, und ihre Gleichgewichtslage ist bei $\alpha = 3{,}0^O$

Berechne die Feldstärke und die Spannung zwischen den geladenen Kondensatorplatten.
Welche Lageenergie W gegenüber der Anfangslage hat B in der neuen Gleichgewichtslage?

c) Nun wird B aus dem Kondensator entfernt. Der Plattenkondensator wird mit $U_O = 10$ kV aufgeladen und dann von der Spannungsquelle getrennt. Dann wird ein Elektrometer zum Kondensator parallel geschaltet. Dabei gehen keine Ladungen verloren. Es hat die Kapazität $C_E = 5{,}0$ pF. Welche Spannung zeigt es an?

Nun wird der Abstand d der Kondensatorplatten mit der konstanten Geschwindigkeit $v = 1{,}0\ \frac{cm}{s}$ verkleinert. Gib die Elektrometerspannung in Abhängigkeit von der Zeit t an. (Hinweis: $t < 10$ s).

d) Kondensator und Elektrometer seien entladen, der Plattenabstand betrage 20 cm. Dann wird über einen Widerstand $R = 10^9\,\Omega$ die Anordnung an eine Spannungsquelle mit $U_o = 10$ kV angeschlossen. Man beobachtet an Kondensator und Elektrometer diesen Spannungsverlauf:

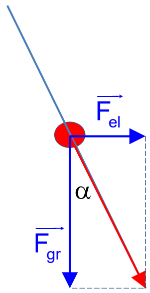
t in ms	10	20	30	40	60	100
U in kV	3,09	5,23	6,71	7,73	8,92	9,75

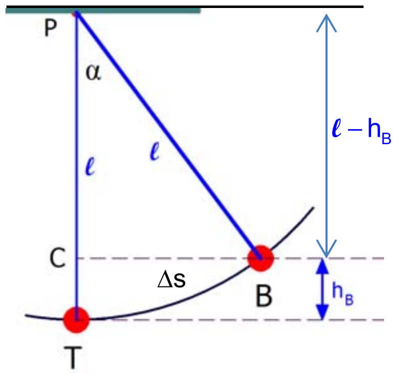
Berechne jeweils die Stärke des durch R fließenden Stromes I und zeichne ein $I - t -$Diagramm (t-Achse: $1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 10$ ms; $I -$ Achse : $1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 1\,\mu A$).

Bestimme aus dem Schaubild näherungsweise die bis zum Zeitpunkt t = 20 ms durch den Widerstand geflossene Ladung. Welche Kapazität ergibt sich aus dieser Näherung für den Kondensator?

Lösung 4:

a) Die rechte Grafik zeigt die geometrischen Verhältnisse, die linke Grafik zeigt die Kräftesituation. Das Seil richtet sich so aus, dass das Seil entlang dem Schenkel von α folgt. Es gilt:





$$\tan\alpha = \frac{F_{el}}{F_{gr}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_{el} = F_{gr} \cdot \tan\alpha = m \cdot g \cdot \tan\alpha \approx 5{,}14 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{N}}$$

Die elektrische Kraft errechnet sich nach dem Coloumbschen Gesetz so: $F_{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O} \cdot \frac{Q \cdot q}{e^2}$

Gleichsetzen führt zu $\frac{1}{4\pi\varepsilon_O} \cdot \frac{Q \cdot q}{e^2} = F_{el} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{4\pi\varepsilon_o \cdot F_{el} \cdot e^2}{q} \approx 2{,}9 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{Cb}$

Die Feldstärke E_1 auf der Oberfläche der Kugel K: $E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O} \cdot \frac{Q}{a^2}$

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O} \cdot \frac{2{,}9 \cdot 10^{-8}}{0{,}02^2} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \approx 6{,}5 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

Die Feldstärke E_2 dieses Feldes am Ort der Kugel B: Dort wirkt die Kraft F_{el} auf die Ladung q. Also ist die Feldstärke dort:

$$E_2 = \frac{F_{el}}{q} = \frac{5{,}14 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{N}}{2 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{Cb}} \approx 2{,}6 \cdot 10^4 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

b) Da das Pendel den gleichen Ausschlag α hat, wie in a) und dieselbe Ladung trägt, ist die elektrische Kraft auf das Pendel die gleicher wie dort und auch die elektrische Feldstärke:

$$E = \frac{F_{el}}{q} = E_2 = 2{,}6 \cdot 10^4 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

Daher folgt: $U = E \cdot d = 2{,}6 \cdot 10^4 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot 0{,}2\,\mathrm{m} = 5{,}2 \cdot 10^3\ \mathrm{V}$

Die Lageenergie W gegenüber der Anfangslage hat B in der neuen Gleichgewichtslage ist

$$W = m \cdot g \cdot h$$

Gemäß der Pendel-zeichnung oben gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\ell - h}{\ell} \quad \Rightarrow \quad \ell \cdot \cos\alpha = \ell - h \quad \Rightarrow \quad h = \ell - \ell \cdot \cos\alpha = \ell \cdot (1 - \cos\alpha)$$

Also: $W = m \cdot g \cdot \ell \cdot (1 - \cos\alpha)$

Mit Zahlen: $W = 10^{-4}\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2\,\mathrm{m} \cdot \left(1 - \cos 3^{\circ}\right) \approx 2{,}7 \cdot 20^{-6}$ Joule

c) Der Plattenkondensator wird mit U_O = 10 kV aufgeladen und dann von der Spannungsquelle getrennt. Dann wird ein Elektrometer zum Kondensator parallel geschaltet. Es hat die Kapazität $C_E = 5{,}0\ \text{pF}$. Welche Spannung zeigt es an?

Weil der Plattenkondensator und das Elektrometer (das auch ein Kondensator ist) parallel geschaltet sind, addieren sich die Kapazitäten: $C_{Kond} = \varepsilon_O \cdot \frac{A}{d} \approx 22{,}1\,\text{pF}$

$$C_{EM} = 5{,}0\ \text{pF}$$

$$C_{ges} = 27{,}1\,\text{pF}$$

Auf der Parallelschaltung befindet sich nun die Ladung: $U = C \cdot U_O = 27{,}1 \cdot 10^{-12}\text{Cb} \cdot 10^4\,\text{V} = 27{,}1 \cdot 10$

Die Gesamtladung, die auf den Kondensator gelang ist:

$$Q = C_{Kon} \cdot U_O = 22{,}1 \cdot 10^{-12}\text{F} \cdot 10^4\ \text{V} = 22{,}1 \cdot 10^{-8}\ \text{Cb}$$

Die Spannung am Elektrometer: $U = \frac{Q}{C_{ges}} = \frac{22{,}1 \cdot 10^{-8}}{27{,}1 \cdot 10^{-12}}\text{V} \approx 8150\ \text{V}$

Nun wird der Abstand d der Kondensatorplatten mit der konstanten Geschwindigkeit $v = 1{,}0\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ verkleinert. Gib die Elektrometerspannung in Abhängigkeit von der Zeit t an. (Hinweis: $t < 10$ s).

Der Abstand der Kondensatorplatten gehorcht der Abstandsfunktion $d(t) = d - v \cdot t$

Das bedeutet für die Kapazität des Kondensators: $C_v(t) = \varepsilon_O \cdot \frac{A}{d(t)}$

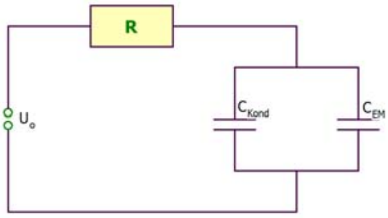
Die Kapazität des Elektrometers ändert sich nicht, aber die gesamt-Kapazität:

$$C_{ges}(t) = C_v(t) + C_{EM} = \varepsilon_O \cdot \frac{A}{d - v \cdot t} + C_{EM} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}5}{0{,}2 - 0{,}01 \cdot t} \quad \text{(ohne Einheiten)}$$

Für die Spannung gilt dann:

$$U(t) = \frac{Q}{C_{ges}(t)} = 2{,}21 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{0{,}2 - 0{,}01 \cdot t}{4{,}4 \cdot 10^{-12}} \approx 50.200 \cdot (0{,}2 - 0{,}01 \cdot t) = 5020(2 - 0{,}1 \cdot t)$$

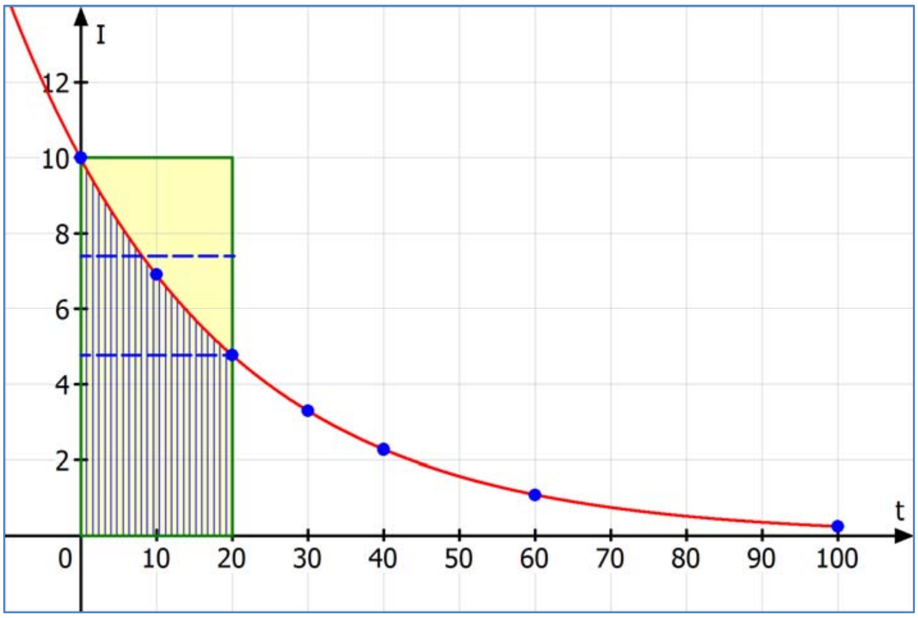
d) Kondensator und Elektrometer seien entladen, der Plattenabstand betrage 20 cm. Dann wird über einen Widerstand $R = 10^9\,\Omega$ die Anordnung an eine Spannungsquelle mit U_o = 10 kV angeschlossen.



Stromstärke: $I(t) = \frac{U_R(t)}{R} = \frac{U_O - U(t)}{R}$

Damit ergänzt man die gegebene Tabelle: Spannungsverlauf und Strom durch R

t in ms	0	10	20	30	40	60	100
U in kV	10,0	3,09	5,23	6,71	7,73	8,92	9,75
I in μA	10,0	6,91	4,77	3,29	2,27	1,08	0,25



Die Einheiten sind auf der t-Achse ms, auf der I-Achse μA.

Bestimme aus dem Schaubild näherungsweise die bis zum Zeitpunkt t = 20 ms durch den Widerstand geflossene Ladung. Welche Kapazität ergibt sich aus dieser Näherung für den Kondensator?

Die Fläche unter der I-t-Kurve gibt die geflossene Ladung an.

Eine Näherung bekommt man, indem man die gestrichelte Fläche durch das Rechteck ersetzt, dessen obere Begrenzung die mittlere gestrichelte Linie ist. Und dieses Rechtzeck hat als Inhalt

den Mittelwert aus dem großen Rechteck bis $I = 10\mu A$ und dem kleinen bis $I(20) = 4{,}77\ \mu A$:

$$\Delta Q = \frac{I(0\text{ ms}) + I(20\text{ ms})}{2} \cdot 20\text{ ms} = \frac{10\mu A + 4{,}77\mu A}{2} \cdot 20\text{ ms} = \frac{14{,}77}{2} \cdot 10^{-6}\,A \cdot 2 \cdot 10^{-2}\,s$$

$$= 14{,}77 \cdot 10^{-8}\,Cb \approx 1{,}5 \cdot 10^{-7}\,Cb$$

Kapazität des Kondensators: $C = \frac{\Delta Q}{U(20\text{ ms})} - C_{EM} = 28\text{ pF} - 5\text{ pF} = 23\text{ pF}$

Aufgabe 5

a) Eine Metallkugel K_1 mit dem Radius r = 0,10 m ist positiv geladen. Im Abstand a = 0,50 m von ihrem Mittelpunkt erfährt ein negativ geladenes Kügelchen mit der Probeladung $q = 5{,}0 \cdot 10^{-8}\,\text{Cb}$ die Kraft $F = 9{,}0 \cdot 10^{-4}\,\text{N}$. Wie groß ist die elektrische Feldstärke am Ort der Probeladung?

Nun wird eine zweite Metallkugel K_2 mit gleichem Radius und gleich großer negativer Ladung wie K_1 aufgestellt. Der Mittelpunktsabstand der beiden Kugeln beträgt d = 1,00 m. Die Verbindung der Kugelmittelpunkte verläuft horizontal.

Wie groß sind die Feldstärken in den Punkten $P_1(0{,}50 \mid 0)$, $P_2(0{,}50 \mid 0{,}50)$ und $P_3(1{,}50 \mid 0)$? (Siehe Arbeitsblatt). Zeichnen Sie in diesen Punkten die resultierende Feldstärke ein. (1 cm $\hat{=} 5000\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$)

b) Das Kügelchen aus a) erfährt eine Gewichtskraft $G = 5{,}0 \cdot 10^{-3}\,\text{N}$ und hängt an einem $\ell = 1{,}00\,\text{m}$ langen Perlonfaden zwischen den Metallkugeln K_1 und K_2. Wie groß ist die horizontale Auslenkung, wenn sich das Kügelchen nach der Auslenkung im Punkt P_1 befindet?

Zeichnen Sie die Aufhängung des Kügelchens maßstabsgetreu in das Arbeitsblatt ein.
Nun wird das Kügelchen entfernt. Mit welcher Kraft ziehen sich K_1 und K_2 an?

c) K_1 und K_2 tragen die entgegengesetzt gleich große Ladung $5{,}0 \cdot 10^{-7}\,\text{Cb}$. Eine negative Probeladung vom Betrag $5{,}0 \cdot 10^{-10}\,\text{Cb}$ wird von einer Kugeloberfläche zur anderen überführt.

Die Überführungsarbeit hat den Betrag $W = 4{,}0 \cdot 10^{-5}\,\text{J}$

Wie groß ist die Spannung zwischen den Kugeln?
Welche Kapazität hat das System?

d) Um den Wert der Kapazität aus c) zu überprüfen, verwendet man zwei Verfahren:

1. An die Kugeln wird eine Gleichspannung mit U_1 = 1,00 kV gelegt.
   Nach dem Abtrennen der Spannungsquelle wird mit einem elektrischen Voltmeter der Kapazität $C_M = 3{,}0 \cdot 10^{-12}\,\text{F}$ zwischen den Kugeln die Spannung U_2 = 675 V gemessen.

2. An die Kugeln wird eine Wechselspannung mit U_{eff} = 20,0 V und $f = 1{,}0 \cdot 10^5\,\text{Hz}$ angelegt.
   Man misst $I_{eff} = 79\,\mu\text{A}$.

Welche Kapazitäten ergeben sich?

Rechne mit $\varepsilon_O = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{Cb}}{\text{Vm}}$ und $\varepsilon_r = 1$.

Arbeitsblatt zu Aufgabe 5

Lösung 5

a) Gegeben ist die positiv geladene Kugel K_1 mit r_1 = 0,10 m und die kleine negativ geladene Kugel K_0 mit der Ladung $q = 5{,}0 \cdot 10^{-8}\,\text{Cb}$ im Abstand a = 0,50 m.

Auf K_o wirkt im elektrischen Feld von K_1 die Kraft $F = 9{,}0 \cdot 10^{-4}\,\text{N}$.

Wie groß ist die elektrische Feldstärke bei K_o?

Die Kraft auf die Ladung q ist $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O} \cdot \frac{Q \cdot q}{a^2}$

Daraus kann man Q berechnen, die Ladung auf K_1:

$$Q = \frac{4\pi\varepsilon_O \cdot a^2 \cdot F}{q} = \frac{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}25 \cdot 9 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-8}}\,\text{Cb} = 5 \cdot 10^{-7}\ \text{Cb}$$

Daraus erhält man die Feldstärke an der Stelle a:

$$E = \frac{F}{q} = \frac{9 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-8}} \frac{\text{N}}{\text{Cb}} \left(= \frac{\text{V}}{\text{m}} \right) = 1{,}8 \cdot 10^4\ \frac{\text{V}}{\text{m}} = 18.000 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Hinweis: Man kann auch so rechnen: $E = \frac{F}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O} \cdot \frac{Q}{a^2} = 18.000 \frac{\text{V}}{\text{m}}$

Nun wird eine zweite Metallkugel K_2 mit gleichem Radius und gleich großer negativer Ladung wie K_1 aufgestellt. Der Mittelpunktsabstand der beiden Kugeln beträgt d = 1,00 m.
Die Verbindung der Kugelmittelpunkte verläuft horizontal.

Wie groß sind die Feldstärken in den Punkten $P_1(0{,}50 \,|\, 0)$, $P_2(0{,}50 \,|\, 0{,}50)$ und $P_3(1{,}50 \,|\, 0)$?
(Siehe Arbeitsblatt). Zeichnen Sie in diesen Punkten die resultierende Feldstärke ein.
(1 cm $\hat{=}\ 5000 \frac{\text{V}}{\text{m}}$)

(1) P_1 liegt genau in der Mitte von K_1 und K_2. Daher wirkt dort von K_1 und von K_2 dieselbe Kraft.
Von der positiv geladenen Kugel K_1 wird auf eine positive Probeladung eine abstoßende Kraft, von der negativ geladenen Kugel K_2 eine anziehende Kraft. Beide Kräfte haben die in a) berechnete Stärke und erzeugen daher jeweils die Feldstärke 18000 V. Durch Überlagerung erhält man in P_1 die doppelte Feldstärke: $E(P_1) = 36.000 \frac{\text{V}}{\text{m}}$.

(2) P_2 $(0{,}5 \,|\, 0{,}5)$ hat von den beiden Mittelpunkten den Abstand $d = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}5^2} = \sqrt{0{,}50} \approx 0{,}707$.

Daher hat die Komponente des von K_1 ausgehenden Feldes in P_2 die Stärke

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O} \cdot \frac{Q}{d^2} = \frac{5 \cdot 10^{-7}}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}5} \frac{\text{V}}{\text{m}} \approx 9000 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$, ebenso bzgl. K_2.

Die resultierende Feldstärke entspricht der Diagonalen im Quadrat aus E_2: $E(P_2) = E_2 \cdot \sqrt{2} \approx 12730 \frac{\text{V}}{\text{m}}$

Für die Zeichnung verwendet man $E_2 \hat{=} \frac{9000}{5000}\text{cm} = 1{,}8\ \text{cm}$ und $E(P_2) \hat{=} \frac{12730}{5000}\text{cm} \approx 2{,}54\ \text{cm}$

Analoges gilt für das von K_2 ausgehende Feld. Beide überlagern sich vektoriell.

(3) In $P_3(1{,}5\,|\,0)$ passiert folgendes:

Von K_1 geht eine abstoßende Kraft aus. Die Feldstärkt bei P_3 ist

$$E_{3,1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O}\cdot\frac{Q}{d^2} = \frac{5\cdot 10^{-7}}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 1{,}5^2}\,\frac{V}{m} \approx 2000\,\frac{V}{m} \quad \text{Das entspricht } \frac{2000}{5000} = 0{,}4\ (\text{cm})$$

Von K_2 geht eine anziehende Kraft aus. Die Feldstärke in P_3 ist

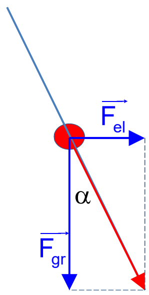
$$E_{3,2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O}\cdot\frac{Q}{d^2} = \frac{5\cdot 10^{-7}}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}5^2}\,\frac{V}{m} \approx 18000\,\frac{V}{m} \quad \text{Das entspricht } \frac{18000}{5000} = 3{,}6\ (\text{cm})$$

Diese entgegengesetzt wirkenden Feldstärken haben als Resultierende $E(P3) = 16.000\,\frac{V}{m}$

Das entspricht $\frac{16000}{5000} = 3{,}2\,(\text{cm})$.

b) Das Kügelchen aus a) erfährt eine Gewichtskraft $G = 5{,}0\cdot 10^{-3}\,N$ und hängt an einem $\ell = 1{,}00\ m$ langen Perlonfaden zwischen den Metallkugeln K_1 und K_2. Wie groß ist die horizontale Auslenkung, wenn sich das Kügelchen nach der Auslenkung im Punkt P_1 befindet?

Die elektrische Kraft auf das Kügelchen errechnet sich aus der Feldstärke in P_1:



$$F_{el} = E(P_1)\cdot q = 36.000\cdot 5\cdot 10^{-8}\,N = 1{,}8\cdot 10^{-3}\,N$$

$$\tan\alpha = \frac{F_{el}}{F_{Gr}} = \frac{1{,}8}{5} \quad\Rightarrow\quad \alpha \approx 19{,}8^O$$

Für die Auslenkung folgt:

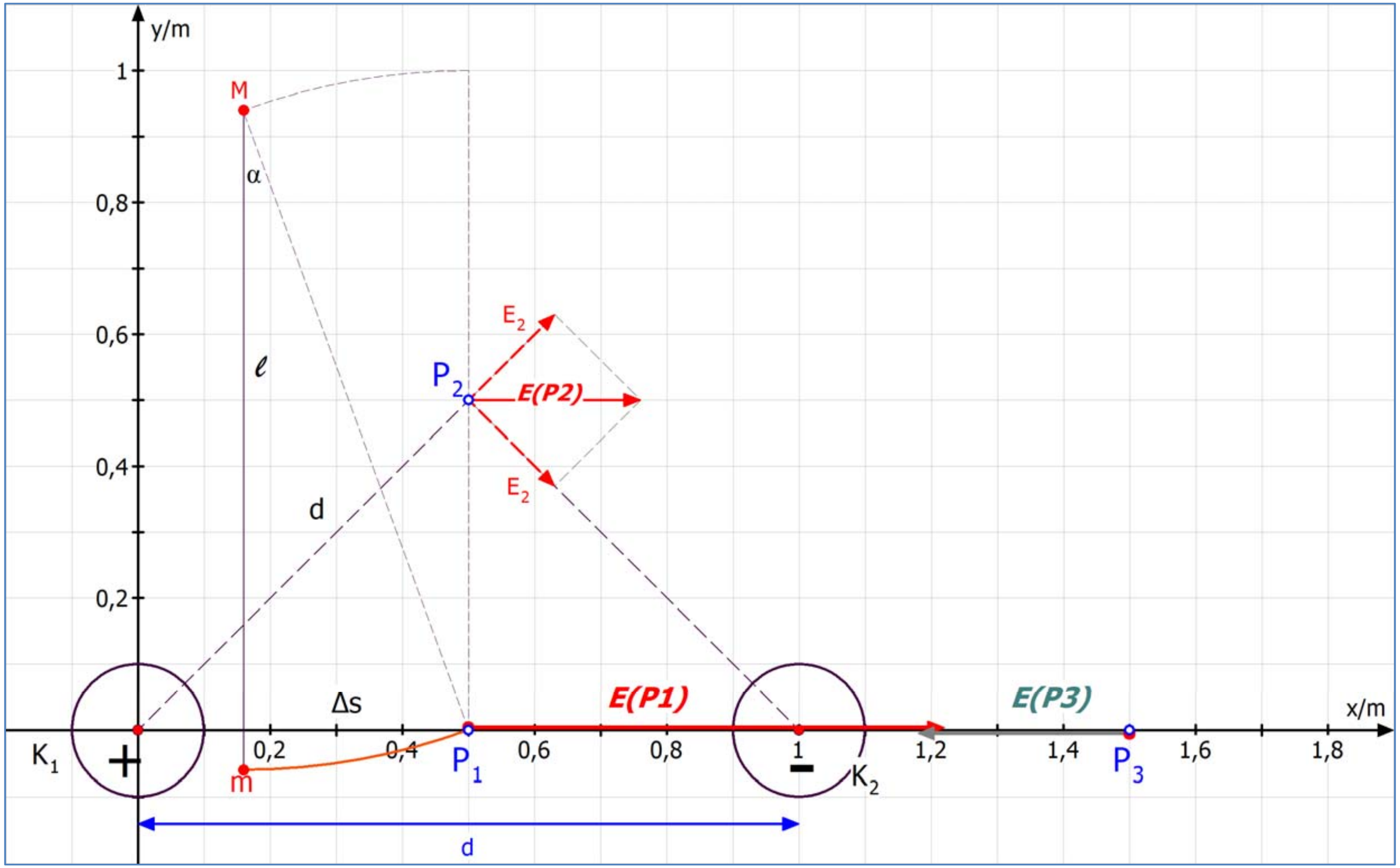
$$\sin\alpha = \frac{\Delta s}{\ell} \quad\Rightarrow\quad \Delta s = \ell\cdot\sin\alpha = 1\,m\cdot\sin 19{,}8^O \approx 0{,}339\ m = 33.9\ cm\text{, also 3,4 cm links von } P_1$$

Zeichnung siehe nächste Seite

Nun wird das Kügelchen entfernt. Mit welcher Kraft ziehen sich K_1 und K_2 an?

Die Kugeln tragen beide die Ladung $Q = 5\cdot 10^{-7}\,Cb$ und den Abstand 1 m. Die Kraft, die sie aufeinander ausüben ist $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O}\cdot\frac{Q\cdot Q}{d^2} = \frac{1}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 20^{-12}}\cdot\frac{25\cdot 10^{-14}}{1^2} \approx 2{,}25\cdot 10^{-3}\ N$

Zeichnung zu a) und b)   M ist der Aufhängepunkt des Pendels mit der Masse m.



c) K$_1$ und K$_2$ tragen die entgegengesetzt gleich große Ladung $5{,}0 \cdot 10^{-7}\,\text{Cb}$. Eine negative Probeladung vom Betrag $5{,}0 \cdot 10^{-10}\,\text{Cb}$ wird von einer Kugeloberfläche zur anderen überführt. Die Überführungsarbeit hat den Betrag $W = 4{,}0 \cdot 10^{-5}\,\text{J}$.

Wie groß ist die Spannung zwischen den Kugeln?

Welche Kapazität hat das System?

Hinweis und Erklärung:

Die Überführungsarbeit berechnet man mit dem Integral:

$$W = \int_{s=0,1}^{s=0,9} F(s)\,ds \quad \text{mit} \quad F(s) = E \cdot q = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_r \cdot \varepsilon_O} \frac{Q}{s^2} \cdot q$$

$$W = \int_{0,1}^{0,9} \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_O} \frac{Q \cdot q}{s^2} ds = \frac{Q \cdot q}{4\pi \cdot \varepsilon_O} \cdot \left[-\frac{1}{s}\right]_{0,1}^{0,9} = \frac{Q \cdot q}{4\pi \cdot \varepsilon_O} \cdot \left[-\frac{1}{0,9} + \frac{1}{0,1}\right] \approx \frac{5 \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-10}}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \cdot 8{,}89\ \text{J} \approx 2 \cdot 10^{-5}\ \text{J}$$

Diesen Wert muss man jedoch verdoppeln, weil zwei gleich stark geladene Kugeln auf q einwirken: z. B. wird q von K$_1$ abgestoßen und von K$_2$ angezogen.

Daher ist die Überführungsarbeit $W = 4{,}0 \cdot 10^{-5}\,\text{J}$

Dieser Wert war als Information angegeben.

Aus der Formel $W = U \cdot q$ folgt $U = \frac{2W}{Q} = \frac{4 \cdot 10^{-5}}{5 \cdot 10^{-10}} \text{V} = 80\,000\text{V}$

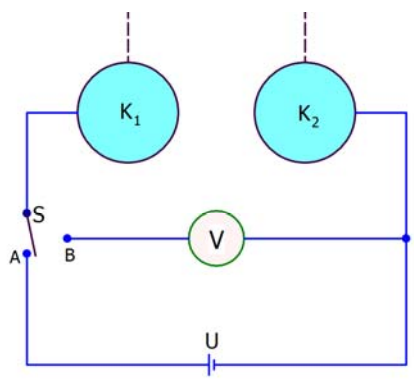
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{5 \cdot 10^{-7}}{80.000} \text{F} = 6{,}25 \cdot 10^{-12} = 6{,}25\ \text{pF}$$

d) Um den Wert der Kapazität aus c) zu überprüfen, verwendet man zwei Verfahren:

1. An die Kugeln wird eine Gleichspannung mit U_1 = 1,00 kV gelegt.
   Nach dem Abtrennen der Spannungsquelle wird mit einem elektrischen Voltmeter der Kapazität $C_M = 3{,}0 \cdot 10^{-12}\text{F}$ zwischen den Kugeln die Spannung U_2 = 675 V gemessen.
2. An die Kugeln wird eine Wechselspannung mit U_{eff} = 20,0 V und $f = 1{,}0 \cdot 10^5\,\text{Hz}$ angelegt.
   Man misst $I_{eff} = 79\ \mu\text{A}$.

Welche Kapazitäten ergeben sich?

Lösung 1. Verfahren:



Liegt der Schalter S an A, werden die Kugeln aufgeladen.
Die Spannung an ihnen ist dann U_1 = 1000 V.
Wird der Schalter nach B umgelegt, ist die Spannungsquelle abgetrennt und ein Elektrometer ist parallel geschaltet.
Dieses zeigt dann 675 Volt an.

Die zwei Kugeln sind zusammen ein Kondensator K_{2K},
das Elektrometer ist ein parallel geschalteter zweiter Kondensator.

Die Ladung auf dem Kondensator K_{2K} ist Q_{ges}. Es gilt: $Q_{Ges} = C_{2K} \cdot U_1$

Legt man den Schalter um, sodass das Elektrometer parallel geschaltet ist, dann bleibt diese Ladung erhalten, verteilt sich aber auf dem Parallelsystem. Die Kapazität von zwei parallelen Kondensatoren ist die Summe der Einzelkapazitäten: $C_{par} = C_{2K} + C_{EM}$

Und daher gilt dann: $Q_{ges} = C_{par} \cdot U_{EM} = (C_{2K} + C_{EM}) \cdot U_{EM}$

Gleichsetzen ergibt: $C_{2K} \cdot U_1 = (C_{2K} + C_{EM}) \cdot U_{EM}$

Umstellen nach C_{2K}:

$$C_{2K} \cdot U_1 = C_{2K} \cdot U_{EM} + C_{EM} \cdot U_{EM}$$

$$C_{2K} \cdot U_1 - C_{2K} \cdot U_{EM} = C_{EM} \cdot U_{EM}$$

$$C_{2K} \cdot (U_1 - U_{EM}) = C_{EM} \cdot U_{EM}$$

$$C_{2K} = \frac{C_{EM} \cdot U_{EM}}{U_1 - U_{EM}}$$

Mit Zahlen: $$C_{2K} = \frac{3 \cdot 10^{-12} \cdot 675}{1000 - 675} F = 6{,}23 \cdot 10^{-12} F \approx 6{,}2\,pF$$

Lösung 2. Verfahren:

Wird eine Wechselspannung an die Kugeln angelegt, bilden sie einen kapazitiven Widerstand.

Für ihn gilt: $$R_C = \frac{1}{2\pi f \cdot C_{2K}}.$$

Andererseits gilt in diesem Stromkreis: $U_{eff} = R_C \cdot I_{eff}$

Daraus folgt durch Ersetzen von R_C: $$U_{eff} = \frac{1}{2\pi f \cdot C_{2K}} \cdot I_{eff}$$

Umstellen nach C_{2K}: $$C_{2K} = \frac{I_{eff}}{2\pi f \cdot U_{eff}}$$

Mit Zahlen: $$C_{2K} = \frac{79 \cdot 10^{-6}}{2\pi \cdot 10^{-5} \cdot 20} \approx 6{,}29 \cdot 10^{-12} F \approx 6{,}3\,pF$$

Aufgabe 6 (1987 BW)

a) In der Mitte zwischen zwei kreisförmigen Kondensatorplatten mit dem Radius r = 12,0 cm hängt an einem Perlonfaden der Länge l = 1,80 m ein Kügelchen der Masse m = 0,47 g. Das Kügelchen ist zunächst ungeladen. Der Plattenabstand beträgt d = 4,00 cm.
Berechne die Kapazität C_O des Kondensators in Luft.

Auf das Kügelchen bringt man nun die Ladung q. Der Kondensator wird an eine Hochspannungsquelle mit der Spannung U = 1,2 kV angeschlossen.
Dabei entfernt sich das Kügelchen um x_O = 1,00 cm in horizontaler Richtung aus der Gleichgewichtslage.
Wie groß ist die Ladung des Kügelchens? (Von der Masse des Fadens, der Ausdehnung des Kügelchens und von Influenzladungen ist abzusehen.)

Die Spannungsquelle wird jetzt vom Kondensator abgetrennt. Danach verdoppelt man den Abstand der Kondensatorplatten. Wie groß ist dann die horizontale Auslenkung des Kügelchens? Die Antwort ist zu begründen.

b) Ein Plattenkondensator, zwischen dessen Platten sich Luft befindet, hat die Kapazität $C_1 = 40{,}0 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F}$. Er wird an eine Spannungsquelle mit U = 400 V angeschlossen.
Er bleibt mit der Quelle verbunden, während ein Dielektrikum mit der relativen Dielektrizitätszahl $\varepsilon_r = 4$ eingeschoben wird, das den Raum zwischen den Platten ganz ausfüllt.

Welche Ladungsmenge ΔQ fließt dabei zusätzlich auf jede Kondensatorplatte?
Wie groß ist die Energie, die in diesem Zustand im homogenen elektrischen Feld zwischen den Platten des Kondensators gespeichert ist?

Nun wird der Kondensator von der Spannungsquelle getrennt und anschließend das Dielektrikum entfernt. Um welchen Betrag ändert sich die Energie des homogenen elektrischen Feldes zwischen den Kondensatorplatten?

c) An einen Kondensator der Kapazität C_2 = 5,0 µF wird eine Spannung angelegt, deren zeitlicher Verlauf in Abb. 1 dargestellt ist.
Berechne die Stromstärke I für das Zeitintervall 0 s < t < 5,0 s.
Berechne die elektrische Momentanleistung der Quelle zu den Zeitpunkten t_1 = 2,0 s und t_2 = 4,0 s.

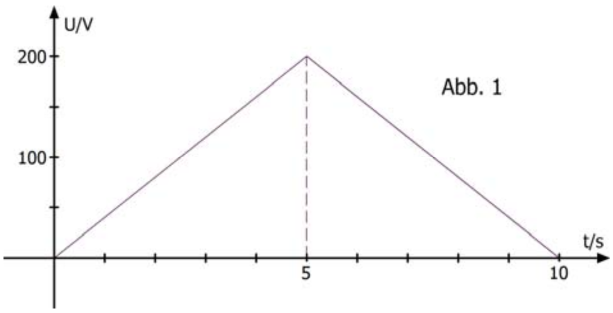
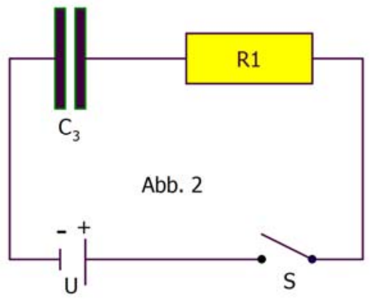


Abb. 1

Zeichne das I-t-Diagramm und das P-t-Diagramm für 0 s < t < 10 s.
(t-Achse: 1 s ≙ 1 cm; I-Achse: 0,1 mA ≙ 1 cm; P-Achse: 8,0 mW ≙ 1 cm)
Wie ist das Auftreten negativer Werte der elektrischen Momentanleistung zu interpretieren?

d) Gegeben ist eine Reihenschaltung aus einem Kondensator mit $C_3 = 5{,}0\ \mu F$ und einem Ohmschen Widerstand mit $R_1 = 100\ \Omega$. Die Spannungsquelle liefert eine konstante Spannung U = 100 V (siehe Abb. 2).
Der Schalter S wird geschlossen.
Berechne den maximalen Wert W_C der Energie des elektrischen Feldes zwischen den Kondensatorplatten.

Berechne den Wert W_R der Energie, die insgesamt im Ohmschen Widerstand R_1 in Wärme umgewandelt wird.
Ändert sich W_R, wenn der Widerstand R_1 durch den Widerstand $R_2 = 50\ \Omega$ ersetzt wird? Begründe die Antwort.



(Von Energieverlusten am Schalter ist abzusehen.)

$g = 9{,}81\ ms^{-2}$; $\varepsilon_O = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{F}{m}$; $\varepsilon_r = 1$ für Luft.

Lösung 6

a) Kügelchen ist zunächst ungeladen. Der Plattenabstand beträgt d = 4,00 cm.
Berechne die Kapazität C0 des Kondensators in Luft.

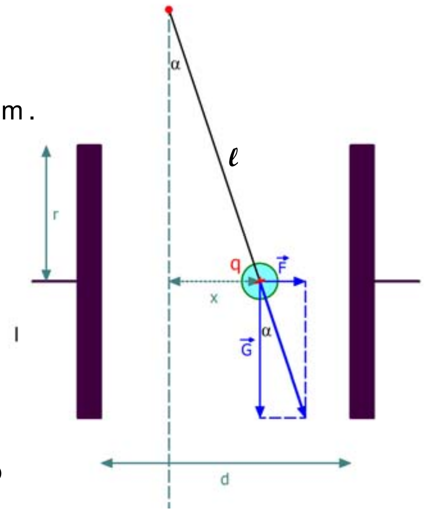
Auf das Kügelchen bringt man nun die Ladung q. Der Kondensator wird an eine Hochspannungsquelle mit der Spannung U = 1,2 kV angeschlossen.
Dabei entfernt sich das Kügelchen um x_O = 1,00 cm in horizontaler Richtung aus der Gleichgewichtslage. Wie groß ist die Ladung des Kügelchens?

a) Zwei kreisförmigen Kondensatorplatten mit r = 12,0 cm und Abstand d = 4 cm.

Kapazität: $C_O = \varepsilon_O \cdot \frac{A}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}12^2}{0{,}04} F \approx 1{,}0 \cdot 10^{-11}\,F = 10\,pF$

Feldstärke im Kondensator: $E = \frac{U}{d} = \frac{1200\,V}{0{,}04\,m} = 3 \cdot 10^4 \frac{V}{m}$

Ein Kügelchen der Masse m = 0,47 g hängt am Faden mit $\ell = 1{,}80\,m$.



Gesucht ist die Ladung q des Kügelchens.

Im Gleichgewicht gilt: $\tan\alpha = \frac{F_{el}}{G} = \frac{E \cdot q}{m \cdot g}$

Geometrie: $\sin\alpha = \frac{x}{\ell}$ mit x = 1 cm

Für kleine Winkel gilt. $\sin\alpha \approx \tan\alpha$.

$$\frac{x}{\ell} = \frac{E \cdot q}{m \cdot g} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{x \cdot m \cdot g}{\ell \cdot E} = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}47 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}81}{1{,}8 \cdot 3 \cdot 10^4} Cb \approx 8{,}5 \cdot 10^{-10} Cb$$

Die Spannungsquelle wird jetzt vom Kondensator abgetrennt. Danach verdoppelt man den Abstand der Kondensatorplatten. Wie groß ist dann die horizontale Auslenkung des Kügelchens? Die Antwort ist zu begründen.

Wird die Spannungsquelle abgetrennt, so bleibt die Kondensatorladung erhalten. Bei der Verdoppelung des Plattenabstandes ändert sich die Kapazität wie folgt: $C' = \varepsilon_O \cdot \frac{A}{2d} = \frac{1}{2} C$.

Damit steigt die Spannung auf das Doppelte: $U' = \frac{Q'}{C'} = \frac{Q}{\frac{1}{2}C} = 2 \cdot \frac{Q}{C} = 2U$. Für die Feldstärke bedeutet das: $E' = \frac{U'}{d'} = \frac{2U}{2d} = \frac{U}{d} = E$, also bleicht auch die el. Kraft auf q gleich und die Auslenkung!

b) Ein Plattenkondensator, zwischen dessen Platten sich Luft befindet, hat die Kapazität $C_1 = 40{,}0 \cdot 10^{-12} F$. Er wird an eine Spannungsquelle mit U = 400 V angeschlossen.
Er bleibt mit der Quelle verbunden, während ein Dielektrikum mit der relativen Dielektrizitätszahl $\varepsilon_r = 4$ eingeschoben wird, das den Raum zwischen den Platten ganz ausfüllt. Welche Ladungsmenge ΔQ fließt dabei zusätzlich auf jede Kondensatorplatte?

Ladung im Kondensator ohne Dielektrikum: $Q_1 = C_1 \cdot U = 40 \cdot 10^{-12} \cdot 400\ \text{Cb} = 1{,}6 \cdot 10^{-8}\ \text{Cb}$

Ladung im Kondensator mit Dielektrikum: $Q_2 = 4 \cdot C_1 \cdot 400\text{V} = 4 \cdot Q_1 = 6{,}4 \cdot 10^{-8}\ \text{Cb}$.

Also fließen $\Delta Q = Q_2 - Q_1 = 4{,}8 \cdot 10^{-8}\ \text{Cb}$ auf jede Platte.

Wie groß ist die Energie, die in diesem Zustand im homogenen elektrischen Feld zwischen den Platten des Kondensators gespeichert ist?

Die gespeicherte Energie berechnet man so:

$$W = \tfrac{1}{2} C' \cdot U^2 = \tfrac{1}{2} \cdot 4C_1 \cdot U^2 = \boxed{2 \cdot C_1 \cdot U^2} = 2 \cdot 40 \cdot 10^{-12} 400^2\ \text{J} = 1{,}28 \cdot 10^{-5}\ \text{J}$$

Nun wird der Kondensator von der Spannungsquelle getrennt und anschließend das Dielektrikum entfernt. Um welchen Betrag ändert sich die Energie des homogenen elektrischen Feldes zwischen den Kondensatorplatten?

Wird die Spannungsquelle getrennt, bleibt die Ladung konstant auf $Q_3 = Q_2 = 4\ Q_1$.

Ohne das Dielektrikum ist $C_3 = C_1$

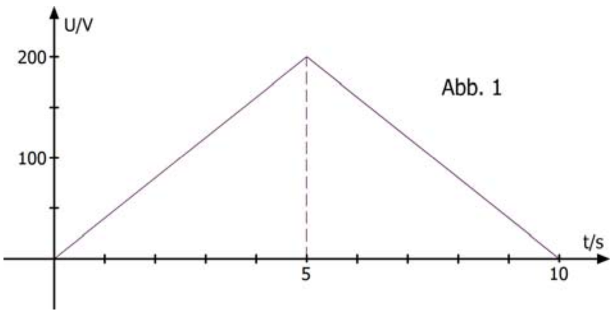
Und damit folgt: $U_3 = \dfrac{Q_3}{C_3} = \dfrac{4\ Q_1}{C_1} = 4 \cdot U$

und für die Energie: $W_3 = \tfrac{1}{2} \cdot C_3 \cdot U_3^{\,2} = \tfrac{1}{2} \cdot C_1 \cdot (4U)^2 = 8 \cdot C_1 U^2$

Änderung der Energie: $\Delta W = 8C_1U^2 - 2C_1U^2 = 6C_1U^2 = 3{,}84 \cdot 10^{-5}\ \text{J}$

c) An einen Kondensator der Kapazität $C_2 = 5{,}0\ \mu\text{F}$ wird eine Spannung angelegt, deren zeitlicher Verlauf in Abb. 1 dargestellt ist.

Berechne die Stromstärke I für das Zeitintervall $0\ \text{s} < t < 5{,}0\ \text{s}$.



Es ist $Q(t) = C \cdot U(t)$.

Die Stromstärke ist die zeitliche Änderung dieser Ladung: $I(t) = \dot{Q}(t) = C \cdot \dot{U}(t)$

Da sich U linear ändert, kann man aus der Zeichnung ablesen: $\dot{U}(t) = \dfrac{\Delta U}{\Delta t} = \dfrac{200\ \text{V}}{5\ \text{s}} = 40\ \dfrac{\text{V}}{\text{s}}$

Daraus folgt: $I(t) = 5 \cdot 10^{-6} \text{F} \cdot 40 \dfrac{\text{V}}{\text{s}} = 200 \cdot 10^{-6}\ \text{A}$ für $0 \le t \le 5\text{s}$.

Berechne die elektrische Momentanleistung der Quelle zu den Zeitpunkten t_1 = 2,0 s und t_2 = 4,0 s.

Für die Leistung gilt $P(t) = U(t) \cdot I(t)$.

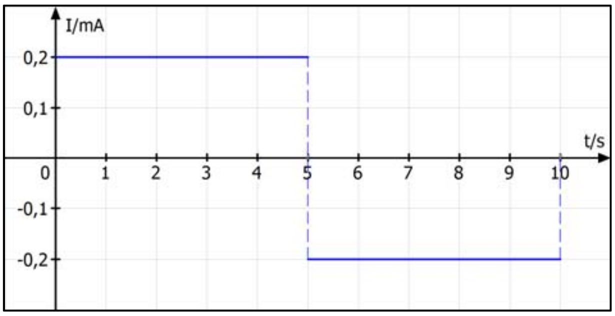
Dabei gilt für $0 \le t \le 5\text{s}$: $U(t) = 40 \frac{V}{s} \cdot t$ und $I(t) = 200 \cdot 10^{-6}\,A = 0{,}2 \cdot 10^{-3}\,A = \boxed{0{,}2\text{ mA}}$

$$P(t) = 40 \frac{V}{s} \cdot t \cdot 200 \cdot 10^{-6}\,A = 8 \cdot 10^{-3} \frac{VA}{s} \cdot t = \boxed{8 \frac{mW}{s} \cdot t}$$

Speziell für t = 2 s: $P(2\,s) = 16 \cdot 10^{-3}\,W = 16\text{ mW}$

und für t = 4 s: $P(4\,s) = 32\text{ mW}$

Das I-t-Diagramm für 0s < t < 10s:



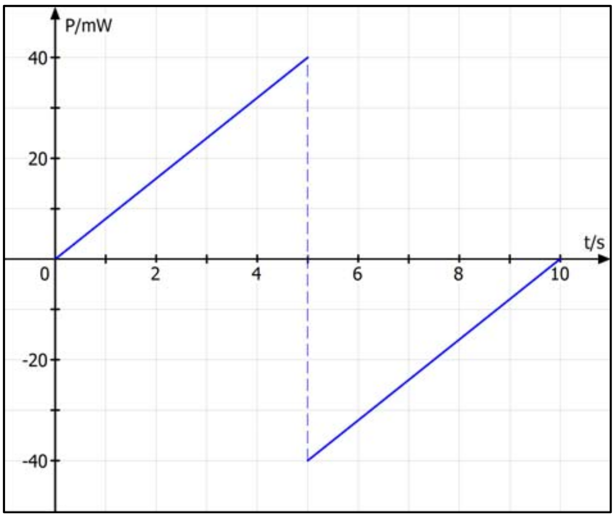
Für $0 < t < 5\text{s}$: $I(t) = 0{,}2\text{ mA}$

Für $5\text{s} < t < 10\text{s}$:

$$\dot{U}(t) = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{-200\text{ V}}{5\text{ s}} = -40 \frac{V}{s}$$

und $I(t) = \boxed{-0{,}2\text{ mA}}$

Das P-t-Diagramm für 0s < t < 10s.



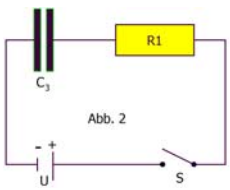
Für $0 < t < 5\text{s}$: $P(t) = 8 \frac{mW}{s} \cdot t$

Für $5\text{s} < t < 10\text{s}$ ist $\dot{U}(t) = -40 \frac{V}{s}$, also fließt der Strom, in umgekehrter Richtung, also wieder zurück.

Daher wird die Leistung zurückgegeben z. B. $P(5{,}0001\text{s}) \approx -40\text{ mW}$

Also: $P(t) = -80\text{mW} + 8 \frac{mW}{s} \cdot t$

d) Gegeben ist eine Reihenschaltung aus einem Kondensator mit C_3 = 5,0 µF und einem Ohmschen Widerstand mit $R_1 = 100\,\Omega$.
Die Spannungsquelle liefert eine konstante Spannung U = 100 V
Der Schalter S wird geschlossen.
Berechne den maximalen Wert W_C der Energie des elektrischen Feldes zwischen den Kondensatorplatten.



Wenn der Schalter geschlossen wird, wächst am Kondensator die Spannung von 0 V auf 100 V an. Dabei wird beim Aufladen diese Arbeit verrichtet:

$$W_C = \tfrac{1}{2} C U^2 = \tfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4\ J = 2{,}5 \cdot 10^{-2}\,J$$

Diese stecke als Energie im Feld des Kondensators.

Berechne den Wert W_R der Energie, die insgesamt im Ohmschen Widerstand R_1 in Wärme umgewandelt wird.

Der Kondensator trägt die Ladung $Q = C \cdot U = 5 \cdot 10^{-6} 100\ \text{Cb} = 5 \cdot 10^{-4}\ \text{Cb}$.

Insgesamt hat die Spannungsquelle diese Arbeit verrichtet:

$$W = Q \cdot U = 5 \cdot 10^{-4}\,\text{Cb} \cdot 100\ \text{V} = 4 \cdot 10^{-2}\ \text{J}$$

Also wurde der Differenzbetrag $\Delta W = W - W_C = 2{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{J}$ im Widerstand R in Wärme umgewandelt.

Ändert sich W_R, wenn der Widerstand R_1 durch den Widerstand $R_2 = 50\ \Omega$ ersetzt wird? Begründe die Antwort.

Die Antwort ist ganz einfach: Bei den ganzen Berechnungen wird die Größe von R nicht verwendet. Also spielt R dabei keine Rolle. Er bestimmt lediglich die Stromstärke beim Aufladen und damit die Dauer des Aufladevorgangs.

Aufgabe 7 (1987 BW)

Ein Plattenkondensator mit der Plattenfläche A = 1130 cm^2 und dem Plattenabstand d_o = 5,0 mm wird an einer Quelle mit der Gleichspannung U_o aufgeladen.

a) Berechnen Sie die Kapazität C_o dieses Kondensators ($\varepsilon_r = 1$).

Nach Abtrennen von der Spannungsquelle wird ein ungeladenes Elektroskop mit der Kapazität C_E = 50 pF parallel zum Kondensator geschaltet, ohne dass dabei Ladung verloren geht.
Das Elektroskop zeigt jetzt die Spannung U_1 = 800 V an.
Berechnen Sie die ursprüngliche Ladung des Kondensators und die Spannung U_o.
Zeigen Sie, dass im homogenen elektrischen Feld eines Plattenkondensators ohne Dielektrikum für die Energiedichte (Energie pro Volumen) gilt: $\rho = \frac{W}{V} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_O \cdot A^2}$

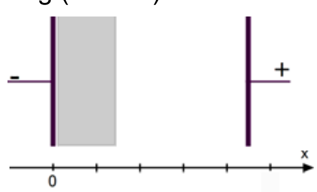
Welchen Wert hatte die Energiedichte des geladenen Kondensators, bevor das Elektroskop angeschlossen wurde?

b) Das Elektroskop wird entfernt. Der Kondensator bleibt von der Spannungsquelle abgetrennt.
Die Spannung zwischen seinen Platten beträgt U_1 = 800 V.
Berechnen Sie die im Kondensator gespeicherte Energie W_1.
Der Plattenabstand wird nun um 2,0 cm vergrößert, ohne dass dabei Ladung abfließen kann.
Wie groß ist jetzt die Kapazität C_2 des Kondensators?
Berechnen Sie den Zuwachs der Energie des elektrischen Feldes, der durch das Auseinanderziehen der Platten verursacht wird. Bestimmen Sie daraus den Betrag der konstanten Kraft, die zur Überwindung der elektro-statischen Anziehung aufgewendet werden muss.

Zwischen die Platten des aufgeladenen Kondensators wird ein d_1 = 2,5 cm dickes Dielektrikum ($\varepsilon_r = 2{,}5$) eingeschoben, das den Raum zwischen den Platten ganz ausfüllt.

Erläutern Sie, weshalb ein eingeschobenes Dielektrikum die Kapazität des geladenen Kondensators ändert. Berechnen Sie die Kapazität C_3 des Kondensators nach dem Hineinschieben des Dielektrikums.

c) Der Plattenabstand des Kondensators beträgt 2,5 cm. Zwischen den Platten befindet sich Luft ($\varepsilon_r = 1$). Nun schiebt man zwischen die Platten ein 5,0 mm dickes Dielektrikum mit $\varepsilon_r = 2{,}5$.
Das Dielektrikum berührt dabei die linke Platte und bedeckt sie vollständig (s. Abb.).
Berechnen Sie die Kapazität C_4 dieses Kondensators.
Es wird jetzt eine Gleichspannungsquelle mit U_1 = 800 V angeschlossen. U(x) sei die Spannung zwischen einer Stelle x des Feldes und der linken Platte.



Zeichnen Sie das U-x-Diagramm für $0 < x < 2{,}5$ cm

(x-Achse: 1 cm $\hat{=}$ 0,25 cm; U-Achse: 1 cm $\hat{=}$ 100 V).

Das Dielektrikum lässt sich im Kondensator in x-Richtung verschieben. Zeigen Sie, dass die Kapazität unabhängig davon ist, wo im Kondensator sich das Dielektrikum befindet.

$\varepsilon_O = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{F}{m}$. Von Randfeldern ist abzusehen.

Lösung 7

a) Plattenfläche A = 1130 cm^2 und Plattenabstand d_o = 5,0 mm.

Kapazität C_O dieses Kondensators:

$$C_O = \varepsilon_O \cdot \frac{A}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \cdot \frac{0{,}113\, m^2}{5 \cdot 10^{-3} m} = 2 \cdot 10^{-10} F = 0{,}2 \cdot 10^{-9} F = 0{,}2\, nF = 200\, pF$$

Nach Abtrennen von der Spannungsquelle wird ein ungeladenes Elektroskop mit der Kapazität C_E = 50 pF parallel zum Kondensator geschaltet, ohne dass dabei Ladung verloren geht.
Das Elektroskop zeigt jetzt die Spannung U_1 = 800 V an.
Berechnen Sie die ursprüngliche Ladung des Kondensators und die Spannung U_O.

Die parallel geschalteten Kondensatoren haben die Gesamtkapazität

$$C_{ges} = C_O + C_{EM} = 2 \cdot 10^{-10} F + 5 \cdot 10^{-11} F = 2{,}5 \cdot 10^{-10}\ F$$

Die angezeigte Spannung von U_1 = 800 V bedeutet, dass die Anordnung mit

$$Q = C_{ges} \cdot U_1 = 2{,}5 \cdot 10^{-10} \cdot 800\ Cb = 2 \cdot 10^{-7}\ Cb$$ geladen ist.

Daraus kann man U_O wie folgt berechnen: Die Ladung Q war ursprünglich auf dem Kondensator allein, sodass gilt:

$$U_O = \frac{Q}{C_O} = \frac{2 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 10^{-10}} V = 1000 V\ .$$

Energiedichte im homogenen elektrischen Feld eines Plattenkondensators ohne Dielektrikum:

Per Definition ist die Energiedichte $\rho = \frac{W}{V}$.

Die im geladenen Kondensator vorhandene Energiedichte ist $W = \frac{1}{2} C \cdot U^2$

Wegen $U = \frac{Q}{C}$ gilt auch $W = \frac{1}{2} C \cdot \frac{Q^2}{C^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}$

Das Volumen im Plattenkondensator ist $V = A \cdot d$

Daher folgt für die Energiedichte: $\rho = \frac{\frac{Q^2}{2C}}{A \cdot d} = \frac{Q^2}{2C \cdot Ad}$

Ferner gilt ja $C = \varepsilon_O \cdot \frac{A}{d}$. Damit erhält man $\rho = \frac{Q^2}{2 \cdot \varepsilon_O \cdot \frac{A}{d} \cdot Ad}$

Ergebnis: $$\rho = \frac{Q^2}{2 \cdot \varepsilon_O \cdot A^2}$$

Welchen Wert hatte die Energiedichte des geladenen Kondensators, bevor das Elektroskop angeschlossen wurde?

$$\rho = \frac{\left(2 \cdot 10^{-7}\ Cb\right)^2}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-7} \frac{F}{m} \cdot \left(0{,}113\ m^2\right)^2} \approx 0{,}18\ \frac{J}{m^3}$$

b) Das Elektroskop wird entfernt. Der Kondensator bleibt von der Spannungsquelle abgetrennt. Die Spannung zwischen seinen Platten beträgt $U_1 = 800$ V. Berechnen Sie die im Kondensator gespeicherte Energie W_1.

$$W_1 = \tfrac{1}{2} \cdot C_O \cdot U_1^2 = \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-12}\text{F} \cdot (800\text{ V})^2 = 6{,}4 \cdot 10^{-5}\text{ J}$$

Der Plattenabstand wird nun um 2,0 cm vergrößert, ohne dass dabei Ladung abfließen kann. Wie groß ist jetzt die Kapazität C_2 des Kondensators?

$$C_2 = \varepsilon_O \cdot \frac{A}{d_2} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot \frac{0{,}113\text{ m}^2}{2{,}5 \cdot 10^{-2}\text{m}} \approx 4 \cdot 10^{-11}\text{F} = 40\text{ pF}$$

Oder so: Es ist $d_2 = 5 \cdot d_0 \;\Rightarrow\; C_2 = \varepsilon_O \cdot \frac{A}{5d_0} = \boxed{\tfrac{1}{5} \cdot C_O} = \tfrac{1}{5} \cdot 200\text{ pF} = 40\text{ pF}$

Berechnen Sie den Zuwachs der Energie des elektrischen Feldes, der durch das Auseinanderziehen der Platten verursacht wird. Bestimmen Sie daraus den Betrag der konstanten Kraft, die zur Überwindung der elektrostatischen Anziehung aufgewendet werden muss.

Da die Ladungsmenge gleich bleibt, gilt für die neue Spannung:

$$U_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{\tfrac{1}{5}C_O} = 5 \cdot \frac{Q}{C_O} = 5 \cdot U_0 = 4000\text{ V}$$

Energie im vergrößerten Kondensator: $W_2 = \tfrac{1}{2} \cdot C_2 \cdot U_2^{\,2} = \tfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^{-11} \cdot 4000^2\text{ J} = 3{,}2 \cdot 10^{-4}\text{ J}$

Ursprüngliche Energie: $W_1 = 6{,}4 \cdot 10^{-5}\text{ J}$

Energiezuwachs: $\Delta W = W_2 - W_1 = 32 \cdot 10^{-5}\text{J} - 6{,}4 \cdot 10^{-5}\text{J} = 25{,}6 \cdot 10^{-5}\text{ J}$

Arbeit zur Vergrößerung des Plattenabstandes: $\Delta W = F \cdot \Delta s$

Dabei aufgewendete Kraft: $F = \frac{\Delta W}{\Delta s} = \frac{25{,}6 \cdot 10^{-5}\text{J}}{2 \cdot 10^{-2}\text{m}} = 12{,}8 \cdot 10^{-3}\text{N}$

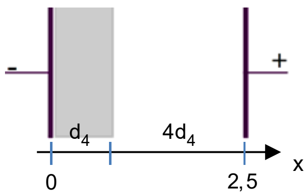
Zwischen die Platten des aufgeladenen Kondensators wird ein $d_1 = 2{,}5$ cm dickes Dielektrikum ($\varepsilon_r = 2{,}5$) eingeschoben, das den Raum zwischen den Platten ganz ausfüllt.

Erläutern Sie, weshalb ein eingeschobenes Dielektrikum die Kapazität des geladenen Kondensators ändert. Berechnen Sie die Kapazität C_3 des Kondensators nach dem Hineinschieben des Dielektrikums.

Das Dielektrikum reagiert auf das äußere Feld mit einer <u>Polarisierung</u>. Seine Bestandteile (Atome oder Moleküle) werden zu kleinen Dipolen, weil sich die Elektronenhülle leicht gegen die positiven Atomkerne verschiebt Die Ladungen und Felder dieser kleinen Dipole heben sich im Inneren des Dielektrikums überall auf, jedoch nicht an den seitlichen Flächen des Dielektrikums. Dort bleiben „induzierte" Ladungen. Diese erzeugen ihrerseits ein elektrisches Feld, das gegen das Kondensatorfeld gerichtet ist. Das resultierende Feld im Dielektrikum ist deshalb immer kleiner als das äußere Feld ist.

$$C_3 = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_O \cdot \frac{A}{d} = 2{,}5 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot \frac{0{,}113\text{ m}^2}{0{,}025\text{ m}} \approx 1 \cdot 10^{-10}\text{N} = 0{,}1\text{nF}$$

c) Der Plattenabstand des Kondensators beträgt 2,5 cm.
Zwischen den Platten befindet sich Luft ($\varepsilon_r = 1$).
Nun schiebt man zwischen die Platten ein 5,0 mm dickes Dielektrikum mit $\varepsilon_r = 2{,}5$.
Das Dielektrikum berührt dabei die linke Platte und bedeckt sie vollständig (s. Abb.).
Berechnen Sie die Kapazität C_4 dieses Kondensators.



Diese Anordnung nennt man auch einen Mischkondensator. Er wird wie eine Reihenschaltung zweier Kondensatoren behandelt. Daher gilt: $\frac{1}{C_4} = \frac{1}{C_L} + \frac{1}{C_R} \Leftrightarrow C_4 = \frac{C_L \cdot C_R}{C_L + C_R}$

Linker Kondensator: $C_L = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_O \cdot \frac{A}{d_4} = 2{,}5 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{0{,}113}{5 \cdot 10^{-3}} F \approx 5 \cdot 10^{-10} F = 500\ pF$

Rechter Kondensator: $C_R = \varepsilon_O \cdot \frac{A}{4d_4} \approx 5 \cdot 10^{-11} F = 50\ pF$

Reihenschaltung: $C_4 = \frac{50 \cdot 500}{550} pF \approx 45\ pF$

Oder mit den Formeln gerechnet:

Reihenschaltung: $$C_4 = \frac{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_O \cdot \frac{A}{d_4} \cdot \varepsilon_O \cdot \frac{A}{4d_4}}{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_O \cdot \frac{4 \cdot A}{4 \cdot d_4} + \varepsilon_O \cdot \frac{A}{4d_4}} = \frac{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_O{}^2 \cdot \frac{A^2}{4d_4{}^2}}{(\varepsilon_r \cdot 4 + 1) \cdot \frac{\varepsilon_O A}{4d_4}} = \frac{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_O \cdot A}{(\varepsilon_r \cdot 4 + 1) \cdot d_4}$$

Mit Zahlen: $C_4 = \frac{2{,}5 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}113}{11 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3}} F \approx 4{,}5 \cdot 10^{-11} F = 45\ pF$

Es wird jetzt eine Gleichspannungsquelle mit U_1 = 800 V angeschlossen. U(x) sei die Spannung zwischen einer Stelle x des Feldes und der linken Platte. Das U-x-Diagramm für $0 < x < 2{,}5$ cm :

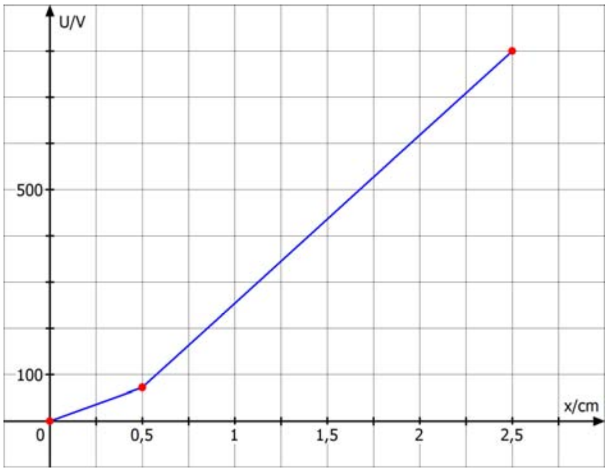
Die Ladung bei einer Serienschaltung ist so, dass jeder Teilkondensator dieselbe Ladung enthält:

$Q_L = Q_R = Q_{ges}$ mit $Q_{ges} = C_4 \cdot U_1 = 4{,}5 \cdot 10^{-11} F \cdot 800\ V \approx 3{,}6 \cdot 10^{-8}$ Cb

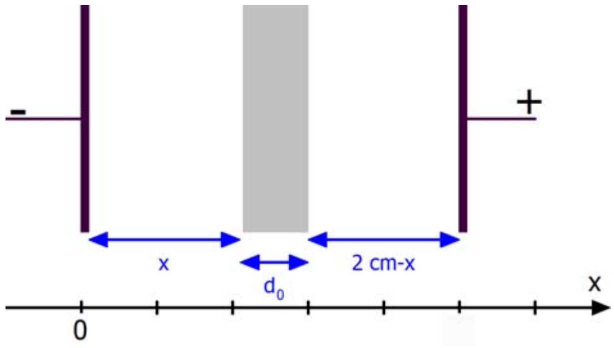
Daher hat die Spannung den Wert $U_4 = \frac{Q_{ges}}{C_4} = \frac{3{,}6 \cdot 10^{-8}}{5 \cdot 10^{-10}} V = 72\ V$

Die Spannung steigt im linken Kondensator von 0 V auf 72 V an, also im Intervall x = 0 bis x = 0,5 cm.

Im rechten Kondensator steigt daher die Spannung von 72 V auf den Endwert 800 V an.



Das Dielektrikum lässt sich im Kondensator in x-Richtung verschieben. Zeigen Sie, dass die Kapazität unabhängig davon ist, wo im Kondensator sich das Dielektrikum befindet.



Jetzt lässt sich die Anordnung als Reihenschaltung von drei Kondensatoren behandeln.

$$C_L = \varepsilon_O \cdot \frac{A}{x} \qquad C_{Mitte} = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_O \cdot \frac{A}{d_O} \qquad C_R = \varepsilon_O \cdot \frac{A}{2cm - x}$$

Reihenschaltung: $$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_L} + \frac{1}{C_{Mitte}} + \frac{1}{C_R}$$

Einsetzen: $$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{x}{\varepsilon_O \cdot A} + \frac{d_o}{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_O \cdot A} + \frac{2cm - x}{\varepsilon_O \cdot A}$$

$$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{\varepsilon_r \cdot x + d_o + \varepsilon_r\left(2cm - x\right)}{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_O \cdot A} = \frac{d_o + \varepsilon_r \cdot 2cm}{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_O \cdot A}$$

Da C_{ges} von x unabhängig ist, spielt es für die Kapazität keine Rolle, wo sich das Dielektrikum befindet.

Aufgabe 8 (1997 BW)

a) Zwei quadratische Metallplatten mit der Kantenlänge a = 42 cm, zwischen denen sich Luft ($\varepsilon_r = 1$) befindet, stehen sich im Abstand d_O = 2,0 cm parallel gegenüber.

Berechnen Sie die Kapazität C_O dieses Kondensators.
Der Kondensator wird an eine Spannungsquelle mit U_O = 3,0 kV angeschlossen.
Berechnen Sie die elektrische Feldstärke E_o zwischen den Platten sowie die im Kondensator gespeicherte Energie W_O.

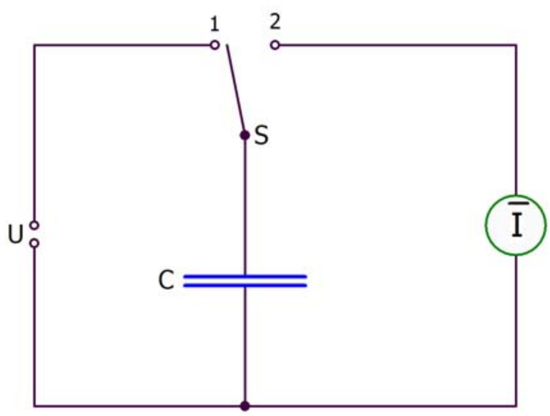
Der Kondensator wird nun von der Spannungsquelle getrennt. Der Plattenabstand wird auf d_1 = 3,0 cm vergrößert. Welche Spannung U_1 besteht nun zwischen den Platten?
Berechnen Sie den neuen Energieinhalt W_1 des Kondensators und die mechanische Arbeit, die beim Vergrößern des Plattenabstandes verrichtet wurde.

b) Ein Plattenkondensator mit der Kapazität $C_O = 7{,}8 \cdot 10^{-22}$ F ist an eine Spannungsquelle mit U_O = 3,0 kV angeschlossen. Danach wird der Raum zwischen den Platten mit einem Dielektrikum ausgefüllt.
Erläutern Sie, weshalb das Dielektrikum die Kapazität des Kondensators ändert.
Geben Sie eine Gleichung für die Änderung der Kapazität in Abhängigkeit von ε_r an.

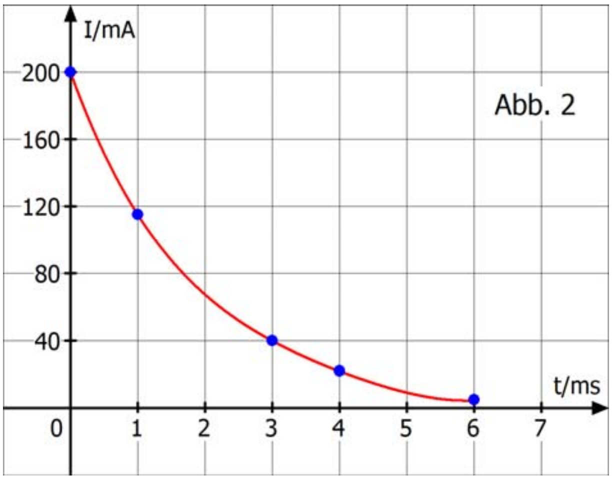
Der Kondensator mit Dielektrikum wird von der Spannungsquelle getrennt und mit einem ungeladenen Elektroskop der Kapazität $C_{EM} = 1{,}4 \cdot 10^{-11}$F verbunden. Das Elektroskop zeigt die Spannung U* = 2,8 kV an. Berechnen Sie ε_r.

c) In einem neuen Versuch soll die Kapazität C eines Kondensators bestimmt werden. Mit dem Wechselschalter S wird der Kondensator in Stellung 1 über den Widerstand R an der Quelle mit U = 20 V aufgeladen und in Stellung 2 über ein geeignetes Strommessgerät entladen (siehe Abb.). Der Auf- und Entladevorgang wiederholt sich 50mal in der Sekunde. Man kann davon ausgehen, dass der Kondensator jeweils vollständig auf- bzw. entladen wird.
Die mittlere Stromstärke beträgt $\overline{I} = 19{,}5$ mA.

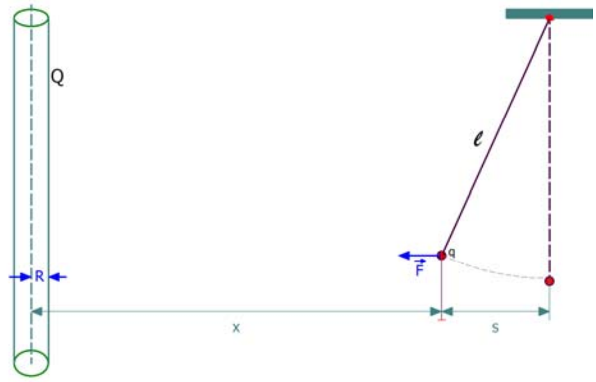
Bestimmen Sie damit die Ladung Q des Kondensators zu Beginn des Entladevorgangs und berechnen Sie C.



Zur Kontrolle soll die Kapazität C aus dem Aufladevorgang bestimmt werden.
Abb. 2 zeigt den zeitlichen Verlauf des Aufladestroms I(t) für R = 100 Ω.
Bestimmen Sie mit Hilfe des Diagramms die Kondensatorspannung U_C zum Zeitpunkt t_1 = 1,00 ms und näherungsweise die Ladung, die bis zu diesem Zeitpunkt auf den Kondensator geflossen ist.
Berechnen Sie C.



d) Ein vertikal aufgestellter, langer Metallzylinder mit dem Radius R = 2,0 cm trägt die positive Ladung Q. Im Abstand r = 8,0 cm von der Zylinderachse befindet sich an einem ℓ = 1,8 m langen Faden ein Pendelkügelchen der Masse m = 0,25 g.
Auf das Kügelchen mit der negativen Ladung $q = -6{,}0 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$ wirkt eine senkrecht zur Zylinderachse gerichtete Kraft F.



Dadurch ist es um s = 2,0 cm ausgelenkt (siehe Abb. 3).
Berechnen Sie daraus den Betrag E der elektrischen Feldstärke am Ort des Kügelchens:

Die folgende Tabelle gibt E in Abhängigkeit von r an:

r in cm	5,0	7,5	10	20
E in N / C	710	480	365	180

Zeichnen Sie ein $E-\frac{1}{r}-$Diagramm.
$\left(\frac{1}{r}-\text{Achse}: 1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 2{,}5\,\frac{1}{\text{m}};\ \ E-\text{Achse}: 1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 100\,\frac{\text{N}}{\text{C}}\right)$

Geben Sie E als Funktion von r an und bestimmen Sie die elektrische Feldstärke an der Oberfläche des Zylinders.

Der Einfluss von Influenzladungen wird nicht berücksichtigt.

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{F}}{\text{m}},\ \ g = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Lösung 8

a) Zwei quadratische Metallplatten mit der Kantenlänge a = 42 cm, zwischen denen sich Luft ($\varepsilon_r = 1$) befindet, stehen sich im Abstand d_O = 2,0 cm parallel gegenüber.

Berechnen Sie die Kapazität C_O dieses Kondensators.

$$C_O = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_O \cdot \frac{A}{d_O} = 1 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{F}{m} \cdot \frac{0{,}42^2\ m^2}{0{,}02\ \ m} \approx 7{,}8 \cdot 10^{-11} = 78\ pF\,.$$

Der Kondensator wird an eine Spannungsquelle mit U_O = 3,0 kV angeschlossen.
Berechnen Sie die elektrische Feldstärke E_o zwischen den Platten sowie die im Kondensator gespeicherte Energie W_O.

Feldstärke: $E_O = \frac{U_O}{d_O} = \frac{3000\ V}{0{,}02\ m} = 150.000\ \frac{V}{m}$

Energie: $W_O = \frac{1}{2} \cdot C_O \cdot U_O^2 = \frac{1}{2} \cdot 7{,}8 \cdot 10^{-11} \cdot 3000^2\ J \approx 3{,}5 \cdot 10^{-4}\ J$

Der Kondensator wird nun von der Spannungsquelle getrennt. Der Plattenabstand wird auf d_1 = 3,0 cm vergrößert. Welche Spannung U_1 besteht nun zwischen den Platten?

Ist die Spannungsquelle abgetrennt, bleibt die gespeicherte Ladung konstant:

$$Q = C_O \cdot U_O = 7{,}8 \cdot 10^{-11} \cdot 3000\ Cb = 2{,}34 \cdot 10^{-7}\ Cb$$

Da der Plattenabstand von 2 cm auf 3 cm vergrößert wird, folgt aus der Formel

$$C_1 = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_O \cdot \frac{A}{\frac{3}{2} d_O} = \frac{2}{3} \cdot C_0 = \frac{2}{3} \cdot 78\ pF = 52\ pF$$

dass die Kapazität abnimmt. Dafür herrscht nun zwischen den Platten die Spannung

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{2{,}34 \cdot 10^{-7}}{52 \cdot 10^{-12}}\,V \approx 4500\ V$$

Berechnen Sie den neuen Energieinhalt W_1 des Kondensators und die mechanische Arbeit, die beim Vergrößern des Plattenabstandes verrichtet wurde.

Beim Auseinanderziehen der Platten wird Arbeit ΔW verrichtet, die einen Anstieg des Energieinhaltes zur Folge hat:

Neuer Energieinhalt: $W_1 = \frac{1}{2} \cdot C_1 U_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 52 \cdot 10^{-12} \cdot 4500^2\,J \approx 5{,}3 \cdot 10^{-4}\ J$

Energiedifferenz: $\Delta W = W_1 - W_O = 5{,}3 \cdot 10^{-4}\,J - 3{,}5 \cdot 10^{-4} = 1{,}8 \cdot 10^{-4}\ J$

b) Ein Plattenkondensator mit der Kapazität $C_O = 7{,}8 \cdot 10^{-11}\ F$ ist an eine Spannungsquelle mit U_O = 3,0 kV angeschlossen. Danach wird der Raum zwischen den Platten mit einem Dielektrikum ausgefüllt. Warum ändert das Dielektrikum die Kapazität des Kondensators?

Das **Dielektrikum** reagiert auf das äußere Feld mit einer Polarisierung. Seine Bestandteile (Atome oder Moleküle) werden zu kleinen Dipolen, weil sich die Elektronenhülle leicht gegen die positiven Atomkerne verschiebt Die Ladungen und Felder dieser kleinen Dipole heben sich im Inneren des Dielektrikums überall auf, jedoch nicht an den seitlichen Flächen des Dielektrikums. Dort verbleiben „induzierte" Ladungen. Diese erzeugen ihrerseits ein elektrisches Feld, das gegen das Kondensatorfeld gerichtet ist. Das resultierende Feld im Dielektrikum ist deshalb immer kleiner als das äußere Feld. Also steigt die Ladung Q an. Wenn wie hier der Kondensator an die Spannungsquelle angeschlossen bleibt, bleibt U konstant. Wegen $C = \frac{Q}{U}$ nimmt also durch das Dielektrikum die Kapazität zu.

Geben Sie eine Gleichung für die Änderung der Kapazität in Abhängigkeit von ε_r an.

Kapazität ohne Dielektrikum: $C_{ohne} = \varepsilon_o \cdot \frac{A}{d}$

Kapazität mit Dielektrikum: $C_{mit} = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_o \cdot \frac{A}{d}$

Zunahme der Kapazität: $\Delta C = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_o \cdot \frac{A}{d} - \varepsilon_o \cdot \frac{A}{d} = (\varepsilon_r - 1) \cdot \varepsilon_o \cdot \frac{A}{d}$

Also gilt: $\Delta C = (\varepsilon_r - 1) \cdot C_{ohne}$

Der Kondensator mit Dielektrikum wird von der Spannungsquelle getrennt und mit einem ungeladenen Elektroskop der Kapazität $C_{EM} = 1{,}4 \cdot 10^{-11} F$ verbunden.

Das Elektroskop zeigt die Spannung U* = 2,8 kV an. Berechnen Sie ε_r.

Zuerst ist der Kondensator ohne Dielektrikum mit $C_O = 7{,}8 \cdot 10^{-11}$ F an $U_O = 3000V$ angeschlossen.

Er trägt dann die Ladung $Q = C_O \cdot U_O = 2{,}34 \cdot 10^{-7}$ Cb

Dann kommt das Dielektrikum zwischen die Kondensatorplatten und die Kapazität steigt und damit auch die Ladung, und zwar auf $Q' = \varepsilon_r \cdot C_O \cdot U_O$. (1)

Nun wird der Kondensator von der Spannungsquelle getrennt. Dabei bleibt die Ladung gleich.

Dann wird der Kondensator mit einem Elektroskop zusammengeschaltet, das geht parallel. Dann liegt an beiden Geräten dieselbe Spannung. Und bei Parallelschaltung zweier Kondensatoren addieren sich die Kapazitäten: $C_{par} = \varepsilon_r C_O + C_{EM} = \varepsilon_r \cdot 7{,}8 \cdot 10^{-11}\text{ F} + 1{,}4 \cdot 10^{-11}\text{F}$

Es gilt daher: $Q' = (\varepsilon_r \cdot C_O + C_{EM}) \cdot U^*$ (2)

(1) = (2): $\varepsilon_r \cdot C_O \cdot U_O = (\varepsilon_r \cdot C_O + C_{EM}) \cdot U^*$

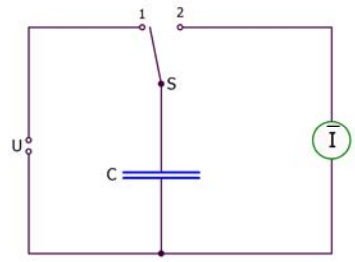
$$\varepsilon_r \cdot C_O \cdot U_O = \varepsilon_r \cdot C_O \cdot U^* + C_{EM} \cdot U^*$$

$$\varepsilon_r \cdot (C_O \cdot U_O - C_O \cdot U^*) = C_{EM} \cdot U^*$$

$$\varepsilon_r = \frac{C_{EM} \cdot U^*}{C_O \cdot (U_O - U^*)}$$

Mit Zahlen: $\varepsilon_r = \frac{1{,}4 \cdot 10^{-11}\text{F} \cdot 2{,}8\text{ kV}}{7{,}8 \cdot 10^{-11} \cdot (3\text{ kV} - 2{,}8\text{ kV})} = \frac{1{,}4 \cdot 2{,}8}{7{,}8 \cdot 0{,}2} = 2{,}51$

c) Neue Bestimmung der Kapazität C eines Kondensators:
Mit dem Wechselschalter S wird der Kondensator in Stellung 1 über den Widerstand R an der Quelle mit U = 20 V aufgeladen und in Stellung 2 über ein geeignetes Strommessgerät entladen
Der Auf- und Entladevorgang wiederholt sich 50-mal pro Sekunde.
Man kann davon ausgehen, dass der Kondensator jeweils vollständig auf- bzw. entladen wird. Die mittlere Stromstärke beträgt $\bar{I} = 19{,}5\text{ mA}$.



Bestimmen Sie damit die Ladung Q des Kondensators zu Beginn des Entladevorgangs und berechnen Sie C.

Die Aufladung dauert also $\Delta t = 0{,}02\text{ s}$ lang !!! (Ebenso die Entladung.)

Bei der mittleren Stromstärke von $\bar{I} = 19{,}5\text{ mA}$ wird daher die Ladung

$Q = \bar{I} \cdot 0{,}02\text{ s} = 19{,}5\text{ mA} \cdot 0{,}02\text{ s} = 0{,}39\text{ mCb} = 3{,}9 \cdot 10^{-4}\text{ Cb}$ auf den Kondensator transportiert.

Das geschieht bei einer Spannung von 20 V.

Also hat der Kondensator die Kapazität $C = \frac{Q}{U} = \frac{3{,}9 \cdot 10^{-4}}{20} = 1{,}95 \cdot 10^{-5}\text{ F} \approx 20\ \mu\text{F}$

Zur Kontrolle soll die Kapazität C aus dem Aufladevorgang bestimmt werden.
Abb. 2 zeigt den zeitlichen Verlauf des Aufladestroms I(t) für R = 100 Ω.
Bestimmen Sie mit Hilfe des Diagramms die Kondensatorspannung U_C zum Zeitpunkt t_1 = 1,00 ms und näherungsweise die Ladung, die bis zu diesem Zeitpunkt auf den Kondensator geflossen ist.
Berechnen Sie C.

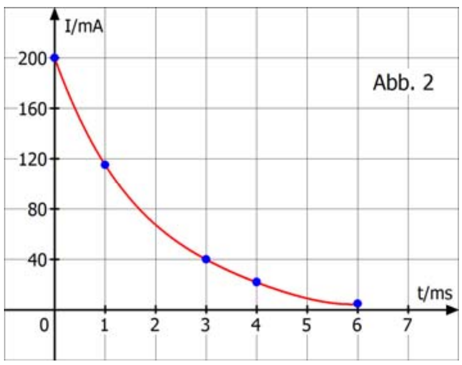


Abb. 2

Für den Aufladevorgang gilt: $U = R \cdot I(t) + U_C(t)$.

Gesucht ist $U_C(1\text{ ms}) = U - R \cdot I(1\text{ ms})$

Mit Zahlen: $U_C(1\text{ ms}) = 20\text{ V} - 100\ \Omega \cdot 120\text{ mA} = 20\text{ V} - 12\text{V} = 8\text{ V}$

Gesucht ist die Ladung, die in der ersten Millisekunde transportiert wird. Da die Stromstärke nicht konstant ist, rechnet man näherungsweise mit dem Mittelwert $\bar{I} \approx \frac{200+120}{2}\text{ mA} = 160\text{ mA}$.

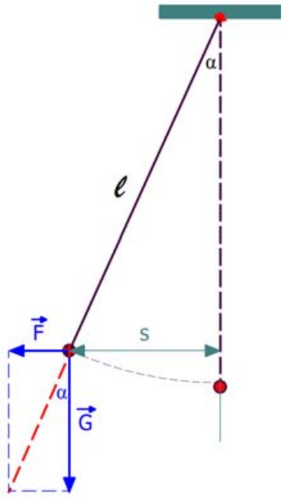
Das ergibt die Ladung: $\bar{Q} = \bar{I} \cdot 1\text{ ms} = 160 \cdot 10^{-3}\text{A} \cdot 10^{-3}\text{s} = 160 \cdot 10^{-6}\text{Cb}$

Daraus folgt für die Kapazität: $C = \frac{\bar{Q}}{U_C(1\text{ ms})} = \frac{160 \cdot 10^{-6}\text{ Cb}}{8\text{ V}} = 20 \cdot 10^{-6}\text{F} = 20\mu\text{F}$.

d) Ein vertikal aufgestellter, langer Metallzylinder mit dem Radius R = 2,0 cm trägt die positive Ladung Q. Im Abstand r = 8,0 cm von der Zylinderachse befindet sich an einem ℓ = 1,8 m langen Faden ein Pendelkügelchen der Masse m = 0,25 g.

Auf das Kügelchen mit der negativen Ladung $q = 6{,}0\cdot 10^{-8\,C}$ wirkt eine senkrecht zur Zylinderachse gerichtete Kraft F. Dadurch ist es um s = 2,0 cm ausgelenkt (siehe Abb. 3).

Berechnen Sie daraus den Betrag E der elektrischen Feldstärke am Ort des Kügelchens:



Es ist $\sin\alpha = \frac{s}{\ell} = \frac{0{,}02}{1{,}8} = \frac{1}{90} \Rightarrow \alpha \approx 0{,}64^{\circ}$ Andererseits ist:

$$\tan\alpha = \frac{F}{G} \Rightarrow F = G\cdot\tan\alpha \approx m\cdot g\cdot\frac{s}{\ell} = 0{,}25\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}81\cdot\frac{1}{90} \approx 2{,}7\cdot 10^{-5}\text{ N}$$

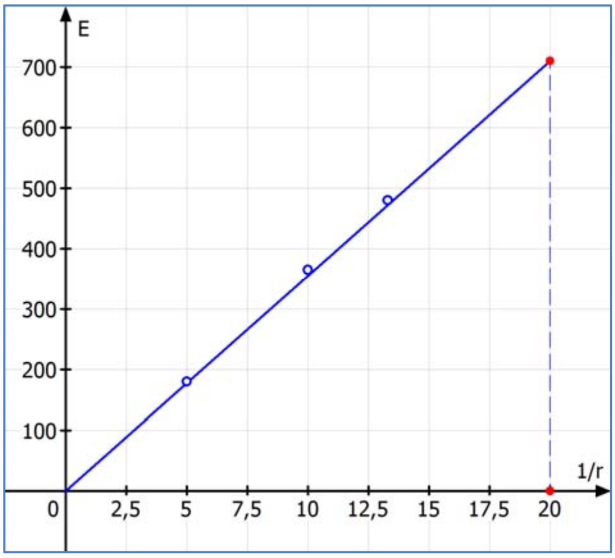
(denn bei kleinen Winkeln ist sin $\sin\alpha \approx \tan\alpha$).

Daraus folgt für die Feldstärke: $E = \frac{F}{q} = \frac{2{,}7\cdot 10^{-5}\text{ N}}{6\cdot 108\text{ Cb}} = 450\,\frac{\text{N}}{\text{Cb}}$

Die folgende Tabelle gibt E in Abhängigkeit von r an:

r in cm	5,0	7,5	10	20
E in N / C	710	480	365	180

Zeichnen Sie ein $E - \frac{1}{r} -$ Diagramm .



Geben Sie E als Funktion von r an und bestimmen Sie die elektrische Feldstärke an der Oberfläche des Zylinders.

Man erkennt eine Proportionalität zwischen E und $\frac{1}{r}$, sodass gilt: $E = k\cdot\frac{1}{r}$

k ist die Proportionalitätskonstante und die Steigung der Geraden. Daher gilt: $k = \frac{710}{20}\frac{\text{Nm}}{\text{Cb}}$

Ergebnis: $E(r) = 36\frac{\text{Nm}}{\text{Cb}}\cdot\frac{1}{r}$

Für die Zylinderoberfläche gilt r = 2 cm, also folgt: $E(2\text{ cm}) = \frac{36}{0{,}02}\frac{\text{N}}{\text{Cb}} = 1800\frac{\text{N}}{\text{Cb}}$.